

Model matematyczny nieliniowego obwodu elektromagnetycznych o parametrach skupionych na podstawie zmodyfikowanej zasady Hamiltona-Ostrogradskiego

Streszczenie. W pracy, na podstawie zmodyfikowanej zasady Hamiltona-Ostrogradskiego, opracowano model matematyczny typowego obwodu elektromagnetycznego o parametrach skupionych, który wykorzystuje koncepcję mechanicznego i elektrycznego formalizmu Lagrange'a. W tym celu został opracowany niekonserwatywny lagrangian, który oprócz tradycyjnych funkcji energii kinetycznej i potencjalnej zawiera energie sił rozproszenia oraz sił niepotencjalnych. Równania obwodów elektromagnetycznych otrzymano w postaci macierzowo-wektorowej. Przedstawiono wyniki symulacji komputerowej w postaci rysunków, które są analizowane.

Abstract. A mathematical model of a typical concentrated parameter electromagnetic circuit using the concept of the mechanical and electric Lagrange's formalism is developed on the basis of the modified Hamilton-Ostrogradsky principle. To this end, a non-conservative lagrangian is compiled including, beside the traditional functions of kinetic and potential energy, the energies of dissipation and non-potential forces. The electromagnetic circuit equations are prepared in the matrix-vectorial form. Computer simulation results are presented graphically and analysed. (A mathematical model of a non-linear concentrated parameter electromagnetic circuit based on the modified Hamilton-Ostrogradsky principle).

Słowa kluczowe: modelowanie matematyczne, obwody elektromagnetyczne, procesy nieustalone, równania linii długiej.

Keywords: mathematical modelling, electromagnetic circuits, transient processes, transmission line equations.

Wstęp

Jednym z podstawowych praw elektrotechniki stosowanej są prawa Kirchhoffa, które dotyczą zarówno obwodów elektrycznych, jak i magnetycznych. W pracy niniejszej będzie przedstawiona metoda otrzymania postaci analitycznej drugiego prawa Kirchhoffa dla nieliniowych obwodów magnetycznych nie w tradycyjny sposób, wychodząc z podejść klasycznych, a w inny sposób – wychodząc z podejść wariacyjnych. Taka procedura daje nam podstawy twierdzić o fundamentalnych zasadach praw Kirchhoffa z punktu widzenia zasady najmniejszego działania Maupertuis'a. W tym celu wykorzystano opracowaną w pracy [1] uogólnioną metodę wariacyjną, która opiera się na modyfikacji zasady Hamiltona-Ostrogradskiego drogą rozszerzenia funkcji Lagrange'a dwoma składnikami, które uwzględniają zewnętrzne i wewnętrzne rozproszenie energii oraz energie sił niepotencjalnych. Modyfikacja zasady Hamiltona-Ostrogradskiego dotyczy układów zarówno o parametrach skupionych, jak i rozłożonych, w przeciwieństwie do pracy [2], w której zmodyfikowana funkcja Lagrange'a dotyczyła wyłącznie układów o parametrach skupionych. Ponadto w monografii [2] autorzy wprowadzili dwa składniki wyłączne formalnie. Natomiast w [1] postać zmodyfikowanego lagrangianu uzyskano w sposób analityczny, wychodząc z równań Lagrange'a drugiego rodzaju. Zaproponowana modyfikacja pozwala na wykorzystywanie podejść wariacyjnych praktycznie do rozwiązania dowolnych zadań fizyki stosowanej. Tak więc, równania nieliniowych obwodów bez wątplenia można uzyskać na podstawie wymienionej zmodyfikowanej zasady Hamiltona-Ostrogradskiego [1, 3].

Obwody elektryczne, magnetyczne lub elektromagnetyczne są częścią podstawową większości urządzeń elektrotechnicznych i elektromechanicznych. W artykułach [4, 5, 6, 7] przedstawiono rozwój modeli matematycznych i na ich podstawie analizę komputerową procesów elektromagnetycznych i elektromechanicznych odpowiednio w transformatorach, maszynach

synchronicznych z magnesami trwałymi (PMSM), maszynach asynchronicznych i maszynach prądu stałego. Wszystkie te modele wykorzystują teorie obwodów elektrycznych.

Artykuły [8, 9, 10] dotyczą modelowania procesów elektromagnetycznych w różnych dziedzinach elektrotechniki. Dotyczy to nagrzewania indukcyjnego, rozwiązania problemów zabezpieczeń przełączników i innych, gdzie ze względu na występowanie różnych zjawisk konieczna jest analiza procesów elektromagnetycznych w konstrukcjach metalowych, na przykład podczas uderzeń pioruna.

Warto także zwrócić uwagę na prace naukowe, w których wykorzystywane są gotowe modele matematyczne dotyczące analizy stanów elektromagnetycznych. W tym celu w pracach [11, 12, 13] autorzy wykorzystują kompleks oprogramowania MatLab/Simulink do analizy procesów elektromagnetycznych.

Wykorzystanie teorii obwodów elektrycznych, magnetycznych, a także elektromagnetycznych ma zastosowanie do analizy pracy maszyn i urządzeń elektrycznych. Oprócz wykorzystania wymienionych teorii możemy twierdzić również o istotnie szerszym wykorzystaniu przedstawionej w niniejszej pracy metodyki, która uwzględnia rozszerzoną zasadę Hamiltona-Ostrogradskiego.

Celem pracy jest wyznaczenie równań nieliniowych obwodów magnetycznych na podstawie podejść wariacyjnych, a także przedstawienie na tej podstawie koncepcji modelowania matematycznego procesów nieustalonych w nieliniowych obwodach elektromagnetycznych. Do realizacji tego celu została wykorzystana zmodyfikowana zasada Hamiltona-Ostrogradskiego.

Model matematyczny układu

Przedstawimy równania stanu obwodu elektromagnetycznego w postaci macierzowo-wektorowej,

które uzyskane są na podstawie zmodyfikowanej zasady Hamiltona-Ostrogradskiego [1].

$$(1) \quad (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P})\Phi_K + \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{V} + \mathbf{F} = \mathbf{0};$$

$$(2) \quad \frac{d\Psi_j}{dt} = \mathbf{u}_j - \mathbf{r}_j \mathbf{i}_j, \quad \Psi_j = \mathbf{L}_{\sigma j} \mathbf{i}_j + \mathbf{w}_j \Phi,$$

gdzie:

$$(3) \quad \mathbf{P}_0 \equiv \text{diag}(\rho_{01}, \rho_{02}, \dots, \rho_{0n}), \quad \mathbf{P} \equiv \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n), \quad \mathbf{F} \equiv (\mathbf{w}_j \mathbf{i}_j)^T;$$

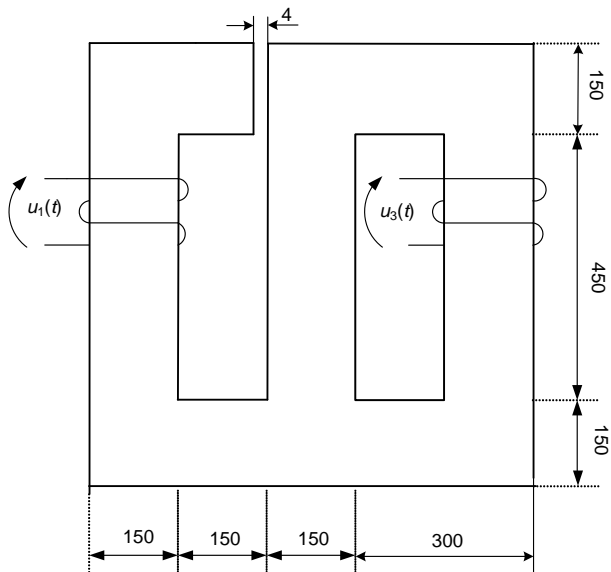
$$(4) \quad \mathbf{w}_j \equiv (w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_{M_k}^{(k)}), \quad \mathbf{i}_j \equiv (i_1^{(k)}, i_2^{(k)}, \dots, i_{M_k}^{(k)}),$$

gdzie: \mathbf{F} – siła magnetomotoryczna SMM, \mathbf{V} – napięcie magnetyczne, Φ_K – oczkowe strumienie magnetyczne, \mathbf{P}_0, \mathbf{P} – oporności magnetyczne szczeliny powietrznej i magnetoprzewodu, Ψ_j – strumienie skojarzone, \mathbf{u} – napięcia zasilania uzwojeń, \mathbf{i} – prądy w uzwojeniach, \mathbf{r} – rezystancja uzwojeń, \mathbf{L}_σ – indukcyjność rozproszenia, \mathbf{w} – liczba zwojów uzwojeń, M_k – liczba uzwojeń w j -tym obwodzie elektrycznym.

Analizując równania (1) – (4) dochodzimy do wniosku, że do obliczenia rzeczywistych wartości strumieni magnetycznych należy wykorzystać metody topologiczne do analizy obwodów magnetycznych.

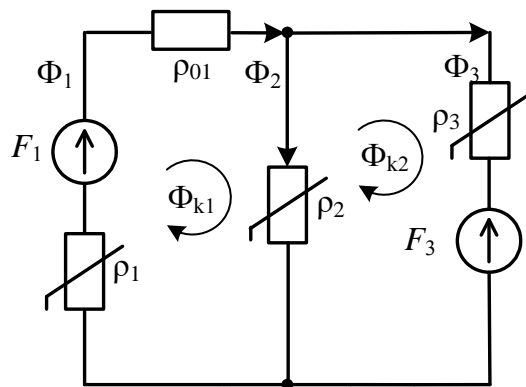
Praktyczna realizacja modelu matematycznego

W przypadku wykorzystania układu równań (1) – (4) analizujemy obwód magnetyczny przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1 Schemat analizowanego obwodu elektromagnetycznego

Parametry obwodu elektromagnetycznego na rysunku 1 są następujące: grubość przewodu $h=150$ mm, napięcia zasilania uzwojeń: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$ [V], $U_{m1} = 300$ [V], $U_{m3}^{(1)} = 200$ [V], $U_{m3}^{(2)} = 350$ [V], $w_1 = 100$, $w_3^{(1)} = 200$, $L_{\sigma 1} = 40$ [mH], $L_{\sigma 3}^{(1)} = 30$ [mH], $L_{\sigma 3}^{(2)} = 40$ [mH], $r_1 = 1$ [Ω], $r_3^{(1)} = 2$ [Ω], $\psi_1 = -\pi/3$, $\psi_3^{(1)} = -\pi/4$. Krzywa namagnesowania stali: $H(B) = v(B)B = 65B + 270B^5$.



Rys. 2 Schemat obliczeniowy obwodu elektromagnetycznego

Z uwzględnieniem wzoru (1) równania części magnetycznej obwodu elektromagnetycznego w postaci macierzowo-wektorowej przy założeniu skompensowania strumieni magnetycznych w węzle wynoszą:

$$(5) \quad \mathbf{F} = (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P})\Phi_K.$$

Przekształcając równanie (5) do postaci współrzędnych otrzymamy:

$$(6) \quad \begin{bmatrix} w_1 i_1 \\ -w_3 i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{01} + \rho_1 + \rho_2 & -\rho_2 \\ -\rho_2 & (\rho_3 + \rho_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{k1} \\ \Phi_{k2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{k1} \\ \Phi_{k2} \end{bmatrix},$$

gdzie: Φ_j – rzeczywiste strumienie skojarzone w układzie, $j=1, 2, 3$.

Równania elektrycznej części obwodu z rysunku 1 wynoszą [1]:

$$(7) \quad \frac{d\Psi_1}{dt} = u_1 - r_1 i_1, \quad \frac{d\Psi_3}{dt} = u_3 - r_3 i_3,$$

$$(8) \quad \Psi_1 = L_{\sigma 1} i_1 + w_1 \Phi_1, \quad \Psi_2 = L_{\sigma 3} i_3 + w_3 \Phi_3.$$

Oporności magnetyczne drugiej gałęzi rdzenia, (rysunek 2) obliczamy w klasyczny sposób [1]:

$$(9) \quad \rho(B) = \frac{v(B)l}{S}, \quad \rho_0 = \frac{l}{\mu_0 S} = \frac{v_0 l}{S},$$

$$v(B) = \frac{1}{\mu(B)} = \frac{H(B)}{B}, \quad v^\delta(B) = \frac{\partial H(B)}{\partial B},$$

Obliczenia indukcji pola magnetycznego rdzenia przeprowadzamy na podstawie definicji, oraz rysunku 1.

$$(10) \quad \Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \Phi_j = B_j S_j \Rightarrow B_j = \frac{\Phi_j}{S_j},$$

gdzie: S_j – przekrój magnetoprzewodu.

Pierwsze prawo Kirchhoffa analizowanego obwodu:

$$(11) \quad \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0.$$

Różniczkując względem czasu wzór (11) z uwzględnieniem warunków początkowych otrzymamy:

$$(12) \quad \frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} - \frac{d\Phi_3}{dt} = 0.$$

Wspólnemu rozwiązaniu podlegają algebro-różniczkowe równania. Liczba niewiadomych wynosi 5 – dwa prądy w uzwojeniach oraz trzy strumienie magnetyczne w elementach rdzenia. Na podstawie krzywej magnesowania otrzymamy:

$$(13) v_j(B_j) = \frac{H(B_j)}{B_j} = 65 + 270B_j^4, \quad v_j^{\partial}(B_j) = \frac{\partial H(B_j)}{\partial B_j} = 65 + 1350B_j^4,$$

$$(14) \rho_j(B_j) = \frac{v_j(B_j)l_j}{S_j}, \quad B_j = \frac{\Phi_j}{S_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

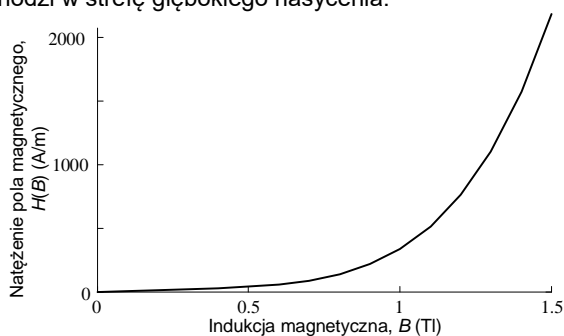
$$(16) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\sigma 1} & & & & \\ & L_{\sigma 3} & & & \\ w_1 & & - \left[\frac{l_1}{S_1^2} v_1^{\partial}(B_1) \Phi_1 + (\rho_{01} + \rho_1) \right] & & \\ & w_2 & & & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} & & & & \\ & w_3 & & & \\ - \left[\frac{l_2}{S_2^2} v_2^{\partial}(B_2) \Phi_2 - \rho_2 \right] & & & & \\ - \left[\frac{l_2}{S_2^2} v_2^{\partial}(B_2) \Phi_2 + \rho_2 \right] & \left[\frac{l_3}{S_3^2} v_3^{\partial}(B_3) \Phi_3 + \rho_3 \right] & & & \\ & & & -1 & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 - r_1 i_1 \\ u_3 - r_3 i_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wspólnemu rozwiązaniu podlega układ nieliniowych równań: (15) z uwzględnieniem (9), (10), (13), (14).

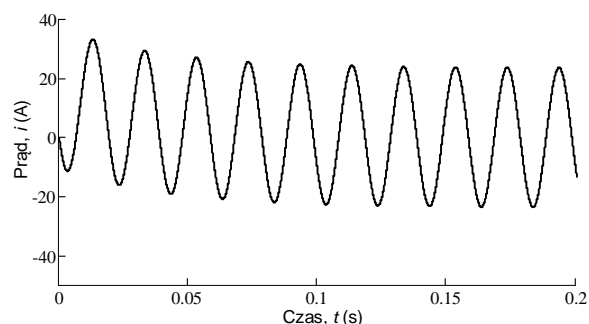
Wyniki symulacji komputerowej

Rozwiązanie układu równań dokonujemy metodą Runge-Cutty z adaptowanym krokiem całkowania z procedurą rotacji macierzy współczynników (\mathbf{A}) na każdym kroku całkowania. Do obliczeń wykorzystano oprogramowanie MATHCAD.

Na rysunku 3 przedstawiono statyczną zależność namagnesowania stali elektrotechnicznej w postaci odwrotnej krzywej namagnesowania $H(B) = v(B)B = 65B + 270B^5$. Przy wartościach indukcji magnetycznej powyżej 1,5 [T] krzywa magnesowania stali wchodzi w strefę głębokiego nasycenia.



Rys. 3. Krzywa namagnesowania stali elektrotechnicznej w odwrotnych zależnościach $H(B) = 65B + 270B^5$



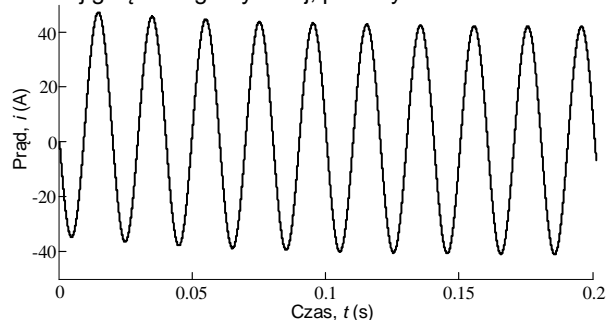
Rys. 4. Przebieg prądu w uzwojeniu pierwszej gałęzi magnetycznej

$$(15) \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{B} \Rightarrow \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}, \quad \det \mathbf{A} \neq 0,$$

gdzie: \mathbf{A} – macierz nieliniowych współczynników, \mathbf{X} – wektor kolumnowy niewiadomych funkcji prądów i strumieni magnetycznych, \mathbf{B} – wektor kolumnowy prawych części równań.

Wyjściowe nieliniowe równania różniczkowe elektromagnetycznego stanu, przedstawimy w postaci współrzędnych:

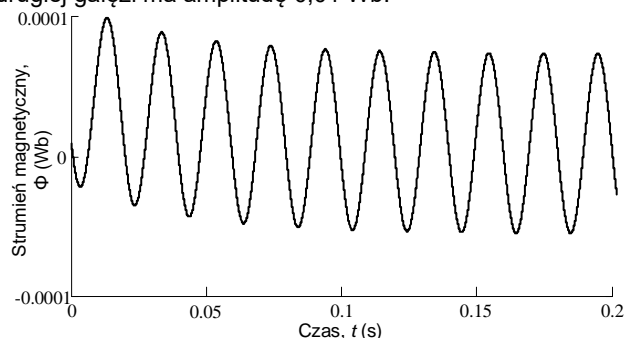
Na rysunkach 4, 5 przedstawiono przebiegi prądów w uzwojeniach obwodu elektromagnetycznego dla pierwszej i trzeciej gałęzi magnetycznej, patrz rysunek 1.



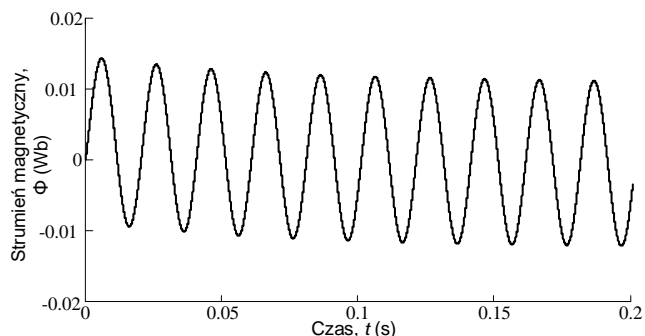
Rys. 5. Przebieg prądu w uzwojeniu trzeciej gałęzi magnetycznej

Widzimy, że po zakończeniu procesu nieustalonego amplituda prądu w pierwszym uzwojeniu ma wartość 24 A, a w drugim uzwojeniu 40 A.

Na rysunkach 6 – 7 przedstawiono przebiegi strumieni magnetycznych dla pierwszej i drugiej gałęzi magnetycznej. Nie podajemy rozkładu czasowego strumienia magnetycznego gałęzi trzeciej, jest on prawie taki sam jak strumień drugiej gałęzi. Wynika to z obecności szczeliny powietrznej o dużym oporze magnetycznym w pierwszej gałęzi, więc główny strumień magnetyczny jest zamykany przez drugą i trzecią gałąź. W stanie ustalonym strumień magnetyczny pierwszej gałęzi ma amplitudę 0,00075 Wb, a drugiej gałęzi ma amplitudę 0,01 Wb.

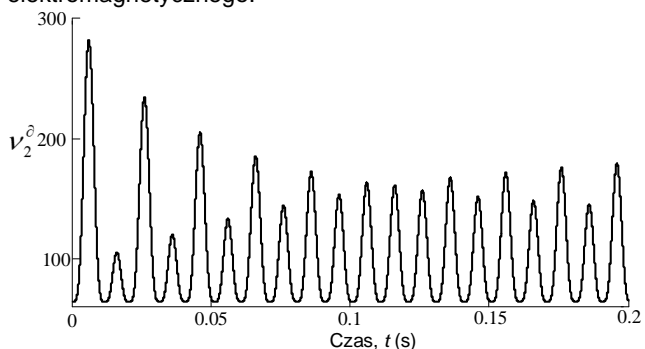


Rys. 6. Przebieg strumienia magnetycznego w pierwszej gałęzi magnetycznej



Rys. 7. Przejściowy strumień magnetyczny w drugiej gałęzi magnetycznej

Na rysunku 8 przedstawiono przejściowe charakterystyki dynamicznej odwrotnej przenikalności magnetycznej ν_2^δ w drugiej gałęzi magnetycznej obwodu elektromagnetycznego.



Rys. 8. Przejściowa dynamiczna odwrotna przenikalność magnetyczna w drugiej gałęzi magnetycznej

Wnioski

Modyfikacja zasady Hamiltona-Ostrogradskiego drogą rozszerzenia konserwatywnej funkcji Lagrange'a za pomocą dwu składników: energii dyssypacji oraz energii zewnętrznych sił niepotencjalnych daje możliwość uzyskania praktycznie wszystkich równań wychodząc wyłącznie z jedynego energetycznego podejścia. Dotyczy to również nieliniowych obwodów elektrycznych, magnetycznych, a także elektromagnetycznych.

Wykorzystanie podejść wariacyjnych w modelowaniu skomplikowanych obiektów dynamicznych, które zawierają podukłady elektrotechniczne w tym obwodów elektromagnetycznych daje możliwość rozwiązania zawężić wykształcenia ewentualnego naukowca. Ponieważ dla tworzenia modelu wspomnianego obiektu wystarczy tylko zapisać energetyczne funkcji rozszerzonego lagrangianu.

Wprowadzenia koncepcji odwrotnych przenikalności magnetycznych daje możliwość rozwiązania równań dynamicznego stanu badanego obiektu w podstawowych wektorach pola elektromagnetycznego. Dotyczy to wektorów indukcji magnetycznej (\mathbf{B}) oraz natężenia pola elektrycznego (\mathbf{E}). Z jednej strony upraszcza to postać matematyczną systemu równań różniczkowych dynamicznego stanu obiektu, a z drugiej strony zmniejsza sztywność zwyczajnych równań różniczkowych.

Wykorzystanie w równaniach stanu obwodów elektromagnetycznych odwrotnych dynamicznych przenikalności magnetycznych daje możliwość opisywania

rzeczywistych procesów fizycznych w analizowanym urządzeniu z maksymalnym stopniem adekwatności.

Autorzy: dr hab. inż. Andriy Chaban, prof. URad., Uniwersytet Radomski, Wydział Transportu, Elektrotechniki i Informatyki, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, Katedra Systemów Elektrycznych, Lwowski Narodowy Uniwersytet Ekologiczny, ul. W Wielkiego 1, Dubliny, Politechnika Lwowska, ul. Bandery 12, Lwów, Ukraina, E-mail: atchaban@gmail.com; dr inż. Andrzej Szafraniec, prof. URad., Uniwersytet Radomski, Wydział Transportu, Elektrotechniki i Informatyki, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, e-mail: a.szafraniec@uthrad.pl; dr inż. Vitaliy Levoniuk, Katedra Systemów Elektrycznych, Lwowski Narodowy Uniwersytet Ekologiczny, ul. W Wielkiego 1, Dubliny, e-mail: bacha1991@ukr.net; dr inż. Andrzej Erd, Uniwersytet Radomski, Wydział Transportu, Elektrotechniki i Informatyki, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, E-mail: a.erd@uthrad.pl; dr inż. Marek Chmiel, Wydział Elektryczny, Politechnika Częstochowska, 42-201 Częstochowa, al. Armii Krajowej 17, E-mail: marek.chmiel@pcz.pl.

LITERATURA

- [1] Chaban A., Hamilton-Ostrogradski Principle in Electromechanical Systems; Soroki, Lviv, Ukraine, (2015), 488
- [2] White D.C., Woodson H.H., Electromagnetic Energy Conversion, John Wiley & Sons Inc, New-York, (1958)
- [3] Czaban A., Lis M., Szafraniec A., Chrzan M., Levoniuk V., Interdisciplinary modelling of transient processes in local electric power systems including long supply lines of distributed parameters, *IEEE Xplore, Applications of Electromagnetics in Modern Techniques and Medicine (PTZE)*, (2018), 105-108
- [4] Yang W., Pan Y., Qiu Z., Zhai G., Electromagnetic transient model and field-circuit coupling numerical calculation of Sen transformer based on finite-element method, *Electric Power Systems Research*, Volume 214, Part B, (2023), No. 108941
- [5] Jang S. M., Koo M. M., Park Y. S., Choi J. Y., Characteristic analysis on permanent magnet synchronous machines with three types of diametrically magnetized rotors under magnetic circuit construction conditions, *IEEE Xplore, Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC)*, (2012)
- [6] Szafraniec A., Modelowanie matematyczne procesów oscylacyjnych w napędzie elektrohydraulicznym o podatnej transmisji ruchu, *Przegląd Elektrotechniczny*, 93 (2017) nr 12, 167-170
- [7] Jing L., Yang K., Gao Y., Kui Z., Min Z., Analysis and Optimization of a Novel Flux Reversal Machine with Auxiliary Teeth, *Energies*, (2022), No. 15, 8906
- [8] Luo M., Dujic D., Allmeling J., Leakage flux modelling of multi-winding transformer using permeance magnetic circuit, *IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, (2016)
- [9] Roppert K., Toth F., Kaltenbacher M., Modeling Nonlinear Steady-State Induction Heating Processes, *IEEE Transactions on magnetics*, 56, (2020), No. 3, 7513904
- [10] Tzeng J. T., Hsieh K. T., Electromagnetic analysis of composite structures subjected to transient magnetic fields, *Journal of Composite Materials*, 54(6) (2020), 745–752
- [11] Wajnert D., Tomczuk B., Simulations of Transients in a Four-Pole Magnetic Bearing with Permanent Magnets, *Sensors*, (2024), No. 24, 1402
- [12] Bjelić S., Bogićević Z., Computer Simulation of Theoretical Model of Electromagnetic Transient Processes in Power Transformers, *I.J. Information Technology and Computer Science*, 01 (2014), 1-12
- [13] Chaban A., Lis M., Szafraniec A., Levoniuk V., Mathematical modelling of transient processes in a three phase electric power system for a single phase short-circuit, *Energies*, 15 (2022), No. 3, 1126–1143