

Charakterystyki filtrów z elementami ułamkowego rzędu z uwzględnieniem impedancji obciążenia

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę wpływu obciążenia na parametry klasycznych filtrów reaktancyjnych i filtrów zawierających elementy ułamkowego rzędu. Badania prowadzono dla różnych obciążeń w postaci impedancji falowej i wybranych rezystancji. Porównano charakterystyki amplitudowe i fazowe analizowanych filtrów dolno- i górnoprzepustowych. Wyniki przedstawiono w postaci analitycznej oraz na wykresach.

Abstract. This paper presents an analysis of the effect of loading on the parameters of classical reactance filters and filters containing fractional order elements. The research was carried out for different loads in the form of wave impedance and selected resistances. The amplitude and phase characteristics of the analysed low- and high-pass filters were compared. The results are presented in analytical form and on graphs. (**Characteristics of filters with fractional order elements considering load impedance**)

Słowa kluczowe: filtry reaktancyjne, elementy ułamkowego rzędu, impedancja falowa.

Keywords: reactance filters, fractional order elements, wave impedance.

Wstęp

Przy projektowaniu ciągłych filtrów analogowych stosowanych do przetwarzania sygnałów, do ich opisu stosuje się funkcja przenoszenia $H(j\omega)$ [1-5]. Funkcja ta nazywana również transmitancją widmową filtru, jest funkcją zespoloną, zdefiniowaną jako:

$$(1) \quad H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = A(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

gdzie: $U_2(j\omega)$, $U_1(j\omega)$ – zespolone wartości skuteczne napięcia wyjściowego i wejściowego.

Pełny opis filtru wymaga użycia dwóch rzeczywistych funkcji częstotliwości: modułu $A(\omega)$ i kąta przesunięcia fazowego $\phi(\omega)$, nazywanych odpowiednio charakterystyką amplitudową i charakterystyką fazową filtru. Charakterystyki amplitudowe i fazowe przedstawione są zależnościami:

$$(2) \quad A(\omega) = |H(j\omega)|, \quad \phi(\omega) = \arg\{H(j\omega)\}$$

Klasyczna teoria filtrów reaktancyjnych zakłada, że filtry muszą pracować w stanie dopasowania falowego. Oznacza to, że analizie w takim przypadku podlegają współczynniki tłumienia i fazowy. Współczynniki te wskazują na sposób przenoszenia sygnału, czyli zmianę jego wartości i fazy [4-9].

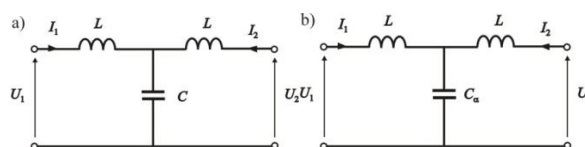
W pracy stosowano do analizy filtrów z elementami niecałkowitego rzędu stosowano definicję Caputo, ponieważ w tym wypadku przy określaniu przekształcenia Laplace'a występują pochodne całkowitego rzędu dla warunków początkowych – co ma łatwą interpretację fizyczną. Stosowanie definicji Riemanna–Liouville'a napotyka tu pewne trudności, ponieważ występują tu pochodne niecałkowitego rzędu dla warunków początkowych, których interpretacja fizyczna nie jest wyjaśniona.

Przedmiotem rozważań są klasyczne filtry reaktancyjne dolno- i górnoprzepustowe oraz filtry zawierające elementy ułamkowego rzędu. Zostaną przedstawione charakterystyki amplitudowe i charakterystyki fazowe dla pracy w stanie jałowym oraz przy obciążeniu impedancją falową i wybranymi rezystancjami [9-12].

Filtry w stanie jałowym

Realizację klasyczną filtru reaktancyjnego dolnoprzepustowego przedstawiono na rys 1a natomiast

jego odpowiednik z elementem niecałkowitego rzędu pokazano na rys. 1b.



Rys. 1. Filtr analogowy dolnoprzepustowy: a) realizacja klasyczna; b) realizacja niecałkowitego rzędu z elementem C_α .

Rozpatrując klasyczny filtr analogowy w stanie jałowym przedstawiony na rysunku 1a otrzymuje się następującą transmitancję napięciową, charakterystykę amplitudową i fazową w stanie jałowym:

$$(3a) \quad H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2LC + 1}$$

$$(3b) \quad H(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2LC}$$

$$(3c) \quad A(\omega) = \frac{1}{|1 - \omega^2LC|}, \quad \phi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \pi & \text{dla } \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

Natomiast dla filtru niecałkowitego rzędu z elementem C_α przedstawionego na rys. 1b mamy odpowiednio:

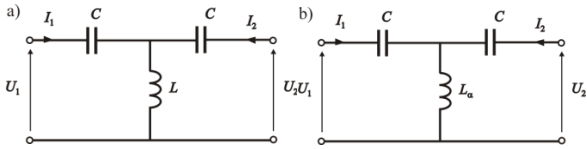
$$(4a) \quad H(s) = \frac{\frac{1}{s^\alpha C_\alpha}}{sL + \frac{1}{s^\alpha C_\alpha}} = \frac{1}{s^{\alpha+1}LC_\alpha + 1}$$

$$(4b) \quad H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^{\alpha+1}LC_\alpha + 1}$$

$$(4c) \quad A(\omega) = \frac{1}{|je^{j\frac{\alpha\pi}{2}} \omega^{\alpha+1}LC_\alpha + 1|} = \left\{ 1 - 2\omega^{\alpha+1}LC_\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \omega^{2\alpha+2}L^2C_\alpha^2 \right\}^{-0,5}$$

$$(4d) \quad \phi(\omega) = -\arctg \frac{\omega^{\alpha+1}LC_\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{1 - \omega^{\alpha+1}LC_\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}$$

Klasyczny filtr reaktancyjny górnoprzepustowy oraz filtr rzędu niecałkowitego z elementem L_α przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Filtr analogowy górnoprzepustowy: a) realizacja klasyczna; b) realizacja niecałkowitego rzędu z elementem L_α

W stanie jałowym w ujęciu klasycznym dla rozpatrywanego filtra górnoprzepustowego otrzymujemy:

$$(5a) \quad H(s) = \frac{sL}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{s^2 LC}{s^2 LC + 1}$$

$$(5b) \quad H(j\omega) = \frac{-\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}$$

$$(5c) \quad A(\omega) = \frac{\omega^2 LC}{|1 - \omega^2 LC|}, \quad \varphi(\omega) = \arg \frac{-\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}$$

Analogiczne wielkości dla takiego filtra zawierającego element niecałkowitego rzędu L_α i otrzymujemy:

$$(6a) \quad H(s) = \frac{s^\alpha L_\alpha}{s^\alpha L_\alpha + \frac{1}{sC}} = \frac{s^{\alpha+1} L_\alpha C}{s^{\alpha+1} L_\alpha C + 1}$$

$$(6b) \quad H(j\omega) = \frac{(j\omega)^{\alpha+1} L_\alpha C}{(j\omega)^{\alpha+1} L_\alpha C + 1} = \frac{(\omega^{\alpha+1} L_\alpha C) \cdot \left(\omega^{\alpha+1} L_\alpha C - \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right)}{\left(1 - \omega^{\alpha+1} L_\alpha C \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right)^2 + \left(\omega^{\alpha+1} L_\alpha C \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right)^2} + j \frac{\omega^{\alpha+1} L_\alpha C \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{\left(1 - \omega^{\alpha+1} L_\alpha C \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right)^2 + \left(\omega^{\alpha+1} L_\alpha C \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right)^2}$$

$$(6c) \quad A(\omega) = \frac{(\omega^{\alpha+1} L_\alpha C) \sqrt{(\omega^{\alpha+1} L_\alpha C)^2 - 2\omega^{\alpha+1} L_\alpha C \sin \frac{\alpha\pi}{2} + 1}}{\left(1 - \omega^{\alpha+1} L_\alpha C \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right)^2 + \left(\omega^{\alpha+1} L_\alpha C \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right)^2}$$

$$(6d) \quad \phi(\omega) = \arctg \frac{\omega^{\alpha+1} L_\alpha C \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{(\omega^{\alpha+1} L_\alpha C)^2 - \omega^{\alpha+1} L_\alpha C \sin \frac{\alpha\pi}{2} + 1}$$

Filtry obciążone impedancją falową i wybranymi rezystancjami

Przedmiotem rozważań są filtry elektryczne klasyczne oraz z elementami niecałkowitego rzędu obciążone impedancją falową i wybranymi rezystancjami. Ogólną postać rozważanych filtrów przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Filtr obciążony impedancją falową i wybranymi rezystancjami

Do opisu relacji między napięciami i prądami na zaciskach wejściowych i wyjściowych stosowane są następujące równania łańcuchowe:

$$(7) \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Impedancją falową filtra symetrycznego wyraża się wzorem:

$$(8) \quad Z_f = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}$$

Dla klasycznego filtra dolnoprzepustowego macierz A przedstawia się następująco:

$$(9) \quad A = \begin{bmatrix} 1 + ZY & 2Z + Z^2 Y \\ Y & 1 + ZY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 LC & 2j\omega L - j\omega^3 L^2 C \\ j\omega C & 1 - \omega^2 LC \end{bmatrix}$$

Tamowność dana jest zależnością:

$$(9a) \quad e^{a+jb} = a_{11} + \sqrt{a_{12}a_{21}} = 1 - \omega^2 LC + \omega\sqrt{LC}\sqrt{(\omega^2 LC - 2)}$$

Współczynniki tłumienia i fazowy przedstawione są zależnościami:

$$(9b) \quad a = \ln \left| 1 - \omega^2 LC + \omega\sqrt{LC}\sqrt{(\omega^2 LC - 2)} \right|$$

$$(9c) \quad b = \ln \arg \left(1 - \omega^2 LC + \omega\sqrt{LC}\sqrt{(\omega^2 LC - 2)} \right)$$

Dla filtra zawierającego element niecałkowitego rzędu macierz A ma postać:

$$(10) \quad A = \begin{bmatrix} 1 + ZY & 2Z + Z^2 Y \\ Y & 1 + ZY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (j\omega)^{1+\alpha} L_\alpha C & 2j\omega L + (j\omega)^{2+\alpha} L^2 C_\alpha \\ (j\omega)^\alpha C_\alpha & 1 + (j\omega)^{1+\alpha} L_\alpha C \end{bmatrix}$$

gdzie: $Y = (j\omega)^\alpha C_\alpha$, $Z = j\omega L$,
oraz:

$$(10a) \quad e^{a+jb} = 1 + (j\omega)^{1+\alpha} L_\alpha C + j\omega\sqrt{L C_\alpha} \sqrt{(2(j\omega)^{\alpha-1} + (j\omega)^{2\alpha} L C_\alpha)}$$

Współczynniki tłumienia i fazowy przedstawione są zależnościami:

$$(10b) \quad a = \ln \left| 1 + (j\omega)^{1+\alpha} L_\alpha C + j\omega\sqrt{L C_\alpha} \sqrt{(2(j\omega)^{\alpha-1} + (j\omega)^{2\alpha} L C_\alpha)} \right|$$

$$(10c) \quad b = \ln \left[\arg \left(1 + (j\omega)^{1+\alpha} L_\alpha C + j\omega\sqrt{L C_\alpha} \sqrt{(2(j\omega)^{\alpha-1} + (j\omega)^{2\alpha} L C_\alpha)} \right) \right]$$

Odpowiednio, macierze A oraz tamowność i wynikające z niej współczynniki tłumienia i fazowy dla filtra górnoprzepustowego dane są zależnościami:

$$(11a) \quad e^{a+jb} = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} + \frac{1}{\omega\sqrt{CL}} \sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2 CL} - 2 \right)}$$

$$(11b) \quad a = \ln \left| 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} + \frac{1}{\omega\sqrt{CL}} \sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2 CL} - 2 \right)} \right|$$

$$(11c) \quad b = \ln \left[\arg \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} + \frac{1}{\omega\sqrt{CL}} \sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2 CL} - 2 \right)} \right) \right]$$

Odpowiednie zależności dla filtra z elementem niecałkowitego rzędu można zapisać następująco:

$$(12a) \quad e^{a+jb} = 1 - \frac{1}{(j\omega)^{1+\alpha} L_\alpha C} + \sqrt{\left(\frac{2}{(j\omega)^{1+\alpha} C L_\alpha} - \frac{1}{(j\omega)^{2\alpha} \omega^2 C^2 L_\alpha^2} \right)}$$

$$(12b) \quad a = \ln \left| 1 - \frac{1}{(j\omega)^{1+\alpha} L_\alpha C} + \sqrt{\left(\frac{2}{(j\omega)^{1+\alpha} C L_\alpha} - \frac{1}{(j\omega)^{2\alpha} \omega^2 C^2 L_\alpha^2} \right)} \right|$$

$$(12c) \quad b = \ln \left[\arg \left(1 - \frac{1}{(j\omega)^{1+\alpha} L_\alpha C} + \sqrt{\left(\frac{2}{(j\omega)^{1+\alpha} C L_\alpha} - \frac{1}{(j\omega)^{2\alpha} \omega^2 C^2 L_\alpha^2} \right)} \right) \right]$$

Jeśli chodzi o impedancję falową, to dla filtra klasycznego (wobec (8) i (9)):

$$(13a) \quad Z_f = \sqrt{\frac{2L - \omega^2 L^2 C}{C}}$$

Natomiast dla filtra ułamkowego rzędu (10) impedancja fazowa wynosi:

$$(13b) \quad Z_{f\alpha} = \sqrt{\frac{2j\omega L + (j\omega)^{2+\alpha} L^2 C_\alpha}{(j\omega)^\alpha C_\alpha}}$$

Przy analizie filtrów bardzo rzadko korzysta się z impedancji wejściowej. Takie podejście wydaje się bardzo przydatne, gdy chce się uwzględnić obciążenie filtra. Impedancja

wejściowa czwornika obciążonego impedancją Z_0 wyraża się wzorem

$$(14) \quad Z_{we} = \frac{a_{11}Z_0 + a_{12}}{a_{21}Z_0 + a_{22}}$$

Dla filtra klasycznego (9) można więc napisać

$$(14a) \quad Z_{we} = \frac{(1 - \omega^2 LC)Z_0 + 2j\omega L - j\omega^3 L^2 C}{j\omega C Z_0 + 1 - \omega^2 LC}$$

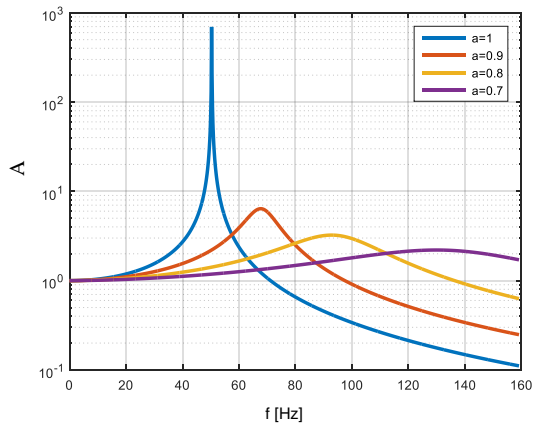
a dla filtra ułamkowego rzędu (10) impedancja wejściowa wynosi

$$(14b) \quad Z_{we} = \frac{1 + (j\omega)^{1+\alpha} LC_\alpha Z_0 + 2j\omega L + (j\omega)^{2+\alpha} L^2 C_\alpha}{(j\omega)^\alpha C_\alpha Z_0 + 1 + (j\omega)^{1+\alpha} LC_\alpha}$$

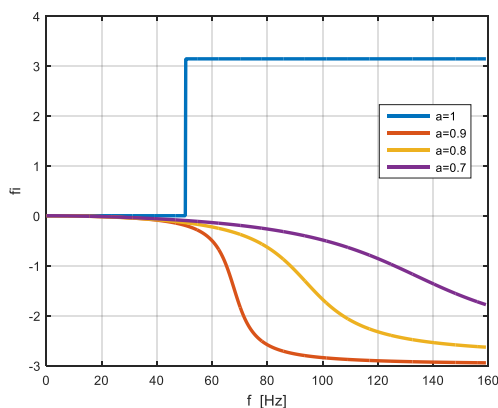
Powyższe wzory będą podstawą do badań symulacyjnych.

Badania symulacyjne

Badania symulacyjne przeprowadzono dla filtra dolnoprzepustowego. W pierwszym etapie ($L=1H$, $C=10 \mu F$) wyznaczono charakterystyki amplitudowe i fazowe dla filtra klasycznego (rys. 1.a) i ułamkowego rzędu (rys. 1.b) dla $\alpha = 0,9$; $0,8$ i $0,7$. Dla porównania umieszczono sporządzone charakterystyki na tych samych rysunkach. Na rys. 4 pokazano widmo amplitudowe a na rys. 5 widmo fazowe.

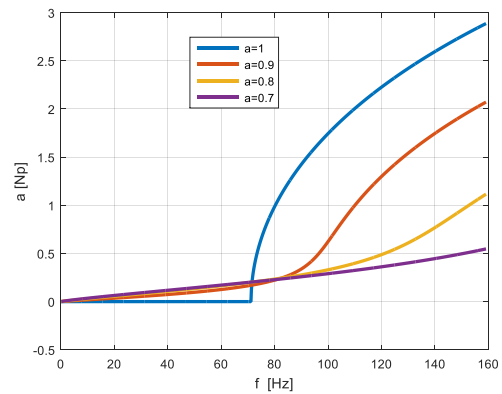


Rys. 4. Charakterystyka amplitudowa w funkcji częstotliwości dla wybranych wartości rzędów parametru α .

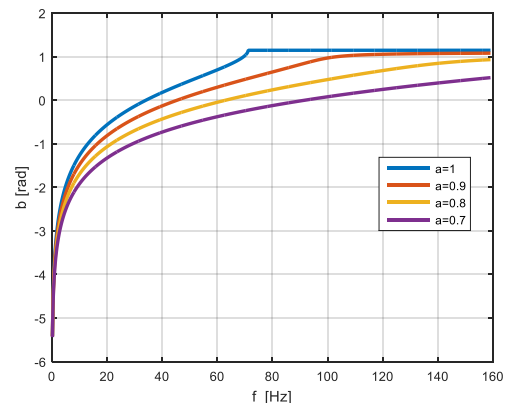


Rys. 5. Charakterystyka fazowa w funkcji częstotliwości dla wybranych wartości rzędów parametru α .

Następnie dla filtrów ($L=1H$, $C=5 \mu F$) wyznaczono zależność współczynnika tłumienia i współczynnika fazowego od częstotliwości. Wyniki przedstawiono na rys. 6 i 7.

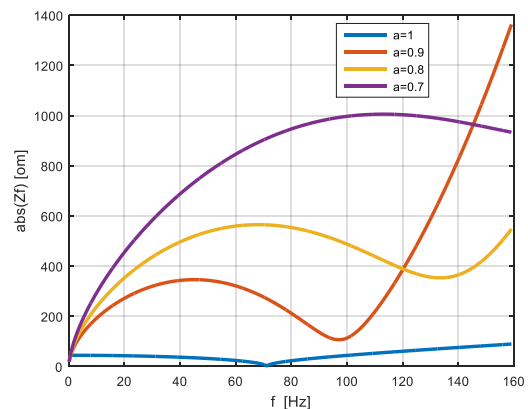


Rys. 6. Zależność współczynnika tłumienia w funkcji częstotliwości dla filtra z klasycznymi elementami ($\alpha = 1$) oraz filtra niecałkowitego rzędu, dla 0,9; 0,8 i 0,7.



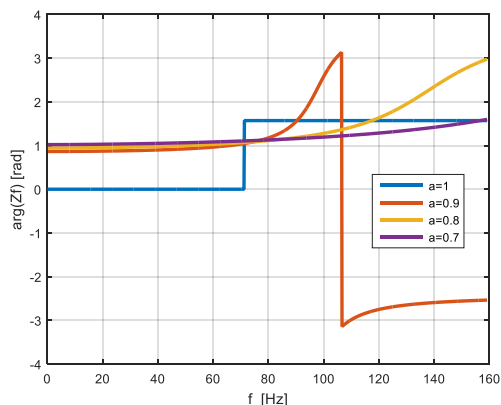
Rys. 7. Zależność współczynnika fazowego w funkcji częstotliwości dla filtra z klasycznymi elementami ($\alpha = 1$) oraz filtra niecałkowitego rzędu, dla 0,9; 0,8 i 0,7.

Dalsza część badań dotyczyła impedancji falowej analizowanych czworników. Na rys 8 zamieszczono moduł impedancji falowej a na rys. 9 jej argument.

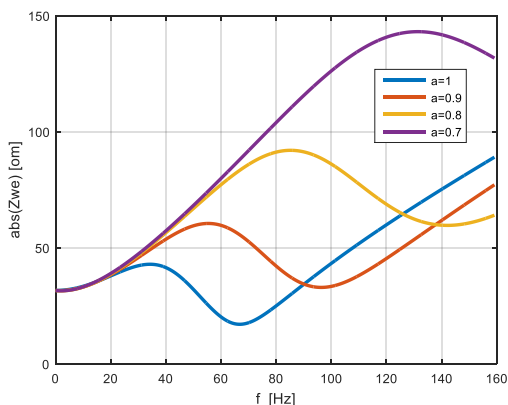


Rys. 8. Moduł impedancji falowej w funkcji częstotliwości dla filtra z klasycznymi elementami ($\alpha = 1$) oraz filtra niecałkowitego rzędu, dla 0,9; 0,8 i 0,7

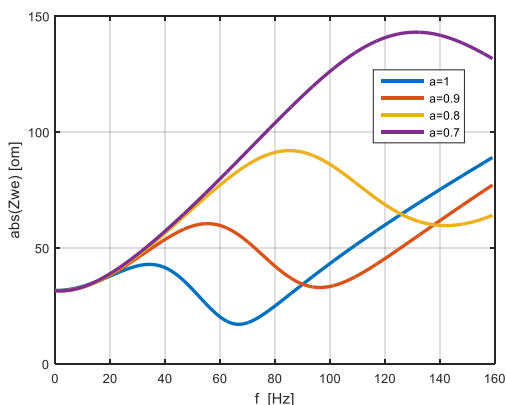
Ostatni etap badań dotyczył wyznaczenia impedancji wejściowej filtra obciążonego rezystancją równą pierwiastkowi z z ilorazu L przez C . Takie obciążenie jest praktycznie wykorzystywane w badaniach eksperymentalnych filtra. Przebiegi przedstawiono na rys. 10 – moduł impedancji wejściowej a na rys 11 jej fazę.



Rys. 9. Argument impedancji falowej w funkcji częstotliwości dla filtru z klasycznymi elementami ($\alpha=1$) oraz filtru niecałkowitego rzędu, dla 0,9; 0,8 i 0,7



Rys. 10. Moduł impedancji wejściowej w funkcji częstotliwości dla filtru z klasycznymi elementami ($\alpha=1$) oraz filtru niecałkowitego rzędu, dla 0,9; 0,8 i 0,7



Rys. 11. Argument impedancji wejściowej w funkcji częstotliwości dla filtru z klasycznymi elementami ($\alpha=1$) oraz filtru niecałkowitego rzędu, dla 0,9; 0,8 i 0,7

Wnioski

Analizując przedstawione wykresy, można zauważyć, że przebiegi analizowanych wielkości dla filtrów klasycznych

($\alpha=1$) są zgodne z przedstawionymi w licznych podręcznikach i publikacjach, natomiast dla filtrów ułamkowego rzędu, wykazują przesunięcie punktów charakterystycznych w kierunku wyższych częstotliwości. Nowym podejściem jest tu analiza impedancji wejściowej pozwalająca na uwzględnienie rzeczywistego obciążenia filtrów.

Autorzy: dr hab. inż. Andrzej Zawadzki prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Urządzeń Elektrycznych i Automatyki; Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, e-mail: a.zawadzki@tu.kielce.pl; dr hab. inż. Sebastian Różowicz prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Urządzeń Elektrycznych i Automatyki; Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, e-mail: s.rozowicz@tu.kielce.pl; dr hab. inż. Maciej Włodarczyk prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Informatyki, Elektroniki i Elektrotechniki, Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, Poland, e-mail: m.wlodarczyk@tu.kielce.pl; dr inż. Krzysztof Baran, Politechnika Rzeszowska, Wydział Elektrotechniki i Informatyki, Katedra Energoelektroniki i Elektroenergetyki, Ul. W Pola 2, 35-959 Rzeszów; e-mail: kbaran@prz.edu

LITERATURA

- [1]. Radwan A., Elwakil A., Soliman A. On the generalization of second-order filters to the fractional-order domain. *J. Circuit Syst. Comp.* 18, 361–286, 2009.
- [2]. Różowicz, S.; Tofil, Sz. And Zrak, A.; *An analysis of the microstructure, macrostructure and microhardness of NiCr-Ir joints produced by laser welding with and without preheat*; Archives Of Metallurgy And Materials; Jun 2016; Volume 61, Issue 2, Page 1157-1162; doi:10.1515/amm-2016-0193.
- [3]. Freeborn T.J., Maundy B., Elwakil A.S. Fractional Resonance-Based $RL\beta C\alpha$ Filters. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 726721, 10 pages, 2013. doi:10.1155/2013/726721.
- [4]. Psychalinos C., Tsimokou G., Elwakil A.S. Switched-Capacitor Fractional-Step Butterworth Filter Design. *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 35, No. 4, pp.1377-1393, 2015.
- [5]. Tsimokou G., Psychalinos C., Elwakil A.S. Fractional-Order Electronically Controlled Generalized Filters. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2016. doi: 10.1002/cta.2250.
- [6]. Tseng Chien-Cheng, Lee Su-Ling. Design of linear phase FIR filters using fractional derivative constraints. *Signal Processing*, Volume 92, Issue 5, pp. 1317-1327, 2012.
- [7]. Osowski S., Cichoński A., Siwek K.: *MATLAB w zastosowaniu do obliczeń obwodowych i przetwarzania sygnałów*, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2006
- [8]. Zawadzki, A.; Różowicz, S.: Application of input-state of the system transformation for linearization of selected electrical circuits. *J. Electr. Eng.-Elektrotechnicky Casopism*. 2016, 67, 199–205; doi:10.1515/jee-2016-0028.
- [9]. Różowicz S., Tofil Sz.: The influence of impurities on the operation of selected fuel ignition systems in combustion engines, *Archives of Electrical Engineering*, Vol. 65(2), pp.349-360, doi:10.1515/ae-2016-0026
- [10]. Bertotti G.: Dynamic generalization of the scalar Preisach model of hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No. 5, September 1992, pp. 2599-2601.
- [11]. Bertotti G., Pasquale M.: Physical interpretation of induction and frequency dependence of power losses in soft magnetic materials. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No. 5, September 1992, pp. 2787-2789.
- [12]. Mayergoyz I.D.: Dynamic Preisach models of hysteresis, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.24. No.6, Nov. 1988, pp. 2925-2927.