

doi:10.15199/48.2024.03.06

Proste, odporne sterowanie położeniem serwonapędu

Streszczenie. W pracy pokazano prosty regulator położenia serwonapędu, wykorzystujący tylko wiedzę o strukturze nieliniowego modelu i ograniczeniach spełnianych przez poszczególne składniki. Pożądany przebieg położenia i prędkości jest uzyskany poprzez narzucenie zmiennego w czasie ograniczenia na sygnał agregujący informację o błędzie śledzenia położenia i prędkości. Metoda pozwala na wyznaczenie maksymalnego sterowania (prądu serwonapędu) koniecznego do zrealizowania celu sterowania przy istniejących warunkach początkowych i przy wybranej trajektorii zadanej. Sterowanie jest ograniczone i polega na właściwej reakcji w przypadku, gdy trajektoria zbliża się do bariery, której kształt odpowiada za narzucone właściwości przebiegu przejściowego i quasi-ustalonego w napędzie.

Abstract. The paper presents a simple servo drive position controller, using only the knowledge about the structure of the non-linear model and the constraints fulfilled by its particular components. The desired position and velocity transient is obtained by imposing a time-varying constraint on the signal aggregating the position and velocity tracking error information. The method allows to determine the maximum control (servo drive current) necessary to achieve the control aim starting from the existing initial conditions and with the selected reference trajectory. The control is constrained and consists in the proper reaction when the trajectory approaches the barrier, the shape of which is responsible for the imposed properties of the transient and quasi-steady state in the drive. (**Simple, robust servo position control**).

Słowa kluczowe: układy napędowe, śledzenie położenia, nieliniowe sterowanie odporne.

Keywords: electric drive systems, servo control, robust nonlinear control.

Wstęp

Podstawowe cele sterowania położeniem serwonapędu to zapewnienie odpowiedniej dokładności śledzenia zadanej trajektorii w stanie quasi-ustalonym, uzyskanie odpowiedniej dynamiki stanu przejściowego i spełnienie ograniczeń nakładanych na zmienne stanu i sygnały sterujące. Wymagania te powinny być bezwzględnie spełnione mimo: nieznanych lub zmieniających się parametrów modelu napędu, nieliniowego, niedokładnie znanego tarcia, zakłóceń działających w trakcie pracy napędu. Często, jest to związane nie tylko z jakością sterowania oraz z korzyściami dla użytkownika, ale jest po prostu wymogiem bezpieczeństwa. Zwłaszcza dotyczy to kwestii spełnienia ograniczeń w każdej chwili pracy napędu.

Problem zapewnienia odpowiednich właściwości układu sterowania w stanach przejściowych jest jednym z kluczowych dla teorii sterowania od dziesiątków lat. Jego generalna trudność polega na tym, że (z wyjątkiem bardzo prostych układów liniowych) zależność między parametrami obiektu i regulatora a właściwościami odpowiedzi układu zamkniętego w stanie przejściowym jest skomplikowana i żadne jej modele analityczne nie są znane. Oczywiście, nawet w przypadku metod projektowania sterowania koncentrujących się na stabilności układu zamkniętego, staramy się zapewnić właściwy przebieg odpowiedzi w

stanach przejściowych oraz spełnienie ograniczeń dla zmiennych stanu i sterowania. Uzyskuje się to poprzez aproksymację zależności między parametrami regulatora a parametrami odpowiedzi układu zamkniętego lub numeryczne strojenie regulatora wykorzystujące odpowiednie kryterium, ale możliwości są ograniczone. Regulator PID może być automatycznie strojony, tak by uzyskać zadaną wartość przeregulowania, czy minimalizować odpowiedni, całkowity wskaźnik jakości przebiegu przejściowego oraz poprawnie pracować przy ograniczeniu sygnału sterującego, ale to nie zagwarantuje zachowania wymagań i ograniczeń w przypadku każdego sygnału zadającego, czy każdego zakłócenia z zadanej klasy, zwłaszcza w przypadku nieliniowego obiektu. Podejście wykorzystujące lokowanie biegunów układu zamkniętego nie wpływa na położenia zer, a te bardzo silnie zmieniają kształt odpowiedzi w stanie przejściowym.

W ostatnich latach powstało kilka metod sterowania, których celem jest zapewnienie właściwych przebiegów w stanie przejściowym, także w przypadku układów nieliniowych. Wybrane techniki zebrano w tabeli 1.

Każda z nich ma swoje ograniczenia, ale można próbować jej zastosowania w układach sterowania położeniem serwonapędu.

Tabela 1. Wybrane metody zapewnienia odpowiedniego przebiegu przejściowego w układzie sterowania

| Nazwa | Referencje | Charakterystyka |
|--|------------|---|
| Finite-time stability (FTS) and control | [1-6] | Zapewnia stabilizację w zadanym czasie trwania procesu przejściowego (w niektórych rozwiązaniach swobodnie zadawanym przez projektanta), wykorzystuje metody Lapunowskie i techniki sterowania adaptacyjnego, zwykle nie uwzględnia ograniczenia sterowania i wymaga dostępu do zmiennych stanu. |
| Model reference adaptive control (MRAC) | [7,8] | Polega na adaptacyjnym dostosowaniu odpowiedzi układu regulacji do odpowiedzi modelu. Początkowo (lata 90-te) dla układów postaci $\dot{x} = Ax + [Bf(x) + u]$. Rozwijana w kierunku zapewnienia odporności układu adaptacyjnego, zwłaszcza na zakłócenia i przyspieszenia odpowiedzi. |
| Prescribed performance control (PPC) | [9-11] | Zapewnia, że błąd śledzenia jest zbieżny do z góry określonego zbioru, z narzuconym dekrementem zbieżności. Osiąga się to poprzez przekształcenie wyjściowego układu z ograniczeniami do układu bez ograniczeń, takiego że jego stabilność implikuje spełnienie ograniczeń w układzie oryginalnym. Problemem może być uwzględnienie ograniczeń sterowania i opóźnień. |
| Funnel control (FC) i polyhedral tubes control (PTC) | [12-16] | Zapewnia, że dla określonej klasy sygnałów zadających błąd śledzenia pozostaje w „lejkach” zdefiniowanym poprzez podanie jego „tworzącej” $\varphi(t)$ w sensie $\varphi(t) \ e(t)\ < 1$. PTC wykorzystuje konwersję ze zbioru parametrów odpowiedzi do wielościennego zbioru ograniczeń w przestrzeni stanu. Jest połączeniem metod numerycznych i analitycznych. |

Podejścia, które zastawano bezpośrednio do sterowania napędami, to np. różne wykorzystanie sterowania ślizgowego [17,18], wykorzystanie rozmytego układu sterowania regulatora [19], zastosowanie barierowych funkcji Lapunowa [20], nieliniowej transformacji zmiennych stanu [21], wykorzystanie odpornego obserwatora współpracującego z nieliniowym regulatorem adaptacyjnym [22], użycie zależnych od czasu barierowych funkcji Lapunowa [23], i inne. Wszystkie z nich bazują na modelu obiektu i jego parametryzacji, choć parametry nie muszą być znane dokładnie. Niektóre (np. metody wykorzystujące barierowe funkcje Lapunowa) wymagają zbadania i spełnienia skomplikowanych warunków realizowalności. Wszystkie prowadzą do dość skomplikowanych regulatorów zawierających nieliniowe prawa sterowania, liczne prawa adaptacji i kilka parametrów do strojenia.

W tej pracy pokazano prosty regulator położenia serwonapędu, wykorzystujący tylko wiedzę o strukturze nieliniowego modelu i ograniczeniach spełnianych przez poszczególne składniki. Pożądany przebieg położenia i prędkości jest uzyskany poprzez narzucenie zmiennego w czasie ograniczenia na sygnał agregujący informację o błędzie śledzenia położenia i prędkości. Metoda pozwala na wyznaczenie maksymalnego sterowania (prądu serwonapędu) koniecznego do zrealizowania celu sterowania przy istniejących warunkach początkowych i przy wybranej trajektorii zadanej. Sterowanie jest ograniczone i polega na właściwej reakcji w przypadku, gdy trajektoria zbliża się do bariery, której kształt odpowiada za narzucone właściwości przebiegu przejściowego i quasi-ustalonego w napędzie.

Sterowanie zostało wyprowadzone, zbadano jego właściwości w eksperymentach symulacyjnych, a następnie opisano jego uruchomienie na stanowisku badawczym i oceniono możliwości implementacji.

Zadanie sterowania

Rozważmy ogólny model ruchu, mogący odnosić się zarówno do ruchu obrotowego jak i postępowego ciała sztywnego:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u + d, \end{aligned}$$

gdzie $x = [x_1, x_2]^T$ oznacza wektor zmiennych stanu, którymi są położenie i prędkość. Po prawej stronie drugiego równania (1) występuje, zgodnie z drugą zasadą dynamiki, bilans sił lub momentów podzielonych przez bezwładność (masę lub moment bezwładności) poruszającego się ciała. I tak: składnik $f(x(t))$ wynika z działania wszystkich zewnętrznych momentów/sił, wśród których mogą być przeciwdziałające ruchowi np. wynikające z tarcia, ale także działające zgodnie z ruchem, np. wynikające z grawitacji, pracy napędzanej maszyny itp., składnik $d(t)$ reprezentuje nieustrukturyzowane (nie opisane w funkcji położenia i prędkości) zakłócenia lub efekty błędów modelowania, a składnik $g(x)u$ jest związany z działaniem napędowym – sterowanie u jest zmienną poprzez którą zadaje się pożądaną wartość siły/momentu napędowego (np. zadaną wartością dla regulatora prądu), a $g(x)$ jest wzmocnieniem aktuatora podzielonym przez bezwładność.

Założymy, że zakłócenie jest ograniczone:

$$(2) \quad |d(t)| \leq D$$

oraz, że znany jest znak i ograniczenia wzmocnienia aktuatora:

$$(3) \quad 0 < g_m \leq g(x) \leq g_M.$$

Funkcja $f(x) = f(x_1, x_2)$ jest w znany sposób ograniczona na każdym ograniczonym zbiorze argumentów.

Celem sterowania jest zapewnienie ruchu śledzącego zadaną, gładką i ograniczoną trajektorię położenia $x_{1d}(t)$, o ograniczonej prędkości i przyspieszeniu $\dot{x}_{1d}(t)$, $\ddot{x}_{1d}(t)$ ($|x_{1d}(t)| \leq A_0$, $|\dot{x}_{1d}(t)| \leq A_1$, $|\ddot{x}_{1d}(t)| \leq A_2$), w taki sposób, by uchyb śledzenia

$$(4) \quad e_1 = x_1 - x_{1d}$$

spełniał narzucone ograniczenie

$$(5) \quad |e_1(t)| \leq A(t) = \alpha e^{-\mu t} + \alpha_\infty,$$

pod warunkiem, że

$$(6) \quad |e_1(0)| \leq A(0) = \alpha + \alpha_\infty = \alpha_0.$$

Współczynnik α_∞ odpowiada za dokładność śledzenia w stanie quasi-ustalonym, μ decyduje o szybkości z jaką dążymy do sięgnięcia tego stanu, a $\alpha + \alpha_\infty$ jest związane z warunkiem początkowym $|e_1(0)|$. Przebieg błędu śledzenia wewnątrz ograniczeń (5) nie jest zdefiniowany w celu sterowania. Cel sterowania powinien być zrealizowany przez ograniczony sygnał sterujący i ograniczenie tego sygnału musi być w znany sposób powiązane z trajektorią zadaną i warunkami początkowymi.

Zagregowany uchyb śledzenia

Wybermy parametr projektowy $\lambda > \mu$ i zdefiniujmy zagregowany uchyb śledzenia:

$$(7) \quad r(t) = \lambda e_1(t) + \dot{e}_1(t).$$

Sygnał $e_1(t)$ jest odpowiedzią filtru inercyjnego o transmitancji

$$(8) \quad G(s) = \frac{1}{s+\lambda}$$

na wymuszenie $r(t)$. Zależność między uchybem zagregowanym a uchybem śledzenia można przedstawić w prostym wniosku:

Wniosek 1

Jeżeli uchyb zagregowany spełnia dla $t \geq 0$ ograniczenie

$$(9) \quad |r(t)| \leq A_r(t) = \alpha_r e^{-\mu t} + \alpha_{r\infty},$$

jeżeli

$$(10) \quad \alpha = \frac{\alpha_r}{\lambda - \mu}, \quad \alpha_\infty = \frac{\alpha_{r\infty}}{\lambda},$$

oraz zachodzi (6), uchyb śledzenia spełnia ograniczenie (5).

Dowód:

Wyznaczając $e_1(t)$ z równania (7) przy niezerowym warunku początkowym $e_1(0)$ znajdujemy, że

$$(11) \quad |e_1(t)| = \left| \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} r(\tau) d\tau + e_1(0) e^{-\lambda t} \right|,$$

a po wykorzystaniu warunku (9) i wykonaniu całkowania mamy

$$(12) \quad |e_1(t)| \leq \frac{\alpha_r}{\lambda - \mu} (e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}) + \frac{\alpha_{r\infty}}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) + |e_1(0)| e^{-\lambda t},$$

czy też inaczej:

$$(13) \quad |e_1(t)| \leq \frac{\alpha_r}{\lambda - \mu} e^{-\mu t} + \frac{\alpha_{r\infty}}{\lambda} + \left(\frac{\alpha_r}{\lambda - \mu} + \frac{\alpha_{r\infty}}{\lambda} - |e_1(0)| \right) e^{-\lambda t}.$$

Po wykorzystaniu założenia $|e_1(0)| \leq \frac{\alpha_r}{\lambda - \mu} + \frac{\alpha_{r\infty}}{\lambda}$ otrzymujemy

$$(14) \quad |e_1(t)| \leq \frac{\alpha_r}{\lambda - \mu} e^{-\mu t} + \frac{\alpha_{r\infty}}{\lambda}.$$

Przy powyższych założeniach także pochodna $\dot{e}_1(t)$ jest ograniczona:

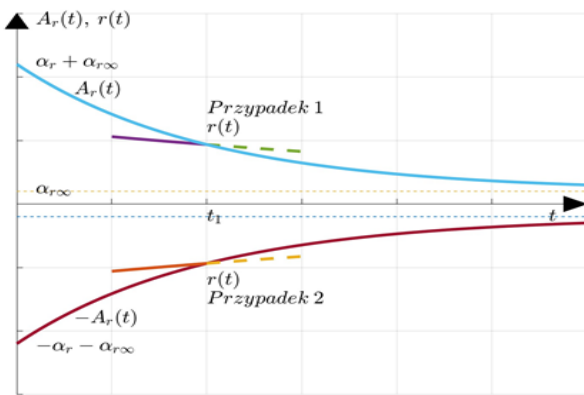
$$(15) \quad \begin{aligned} |\dot{e}_1(t)| &= |r(t) - \lambda e_1(t)| \leq \alpha_r e^{-\mu t} + \alpha_{r\infty} \\ + \lambda \left(\frac{\alpha_r}{\lambda - \mu} e^{-\mu t} + \frac{\alpha_{r\infty}}{\lambda} \right) &= \alpha_r \left(1 + \frac{\lambda \alpha_r}{\lambda - \mu} \right) e^{-\mu t} + 2\alpha_{r\infty} \end{aligned}$$

Jeżeli więc potrafimy poprowadzić sterowanie tak, by był spełniony warunek (9), to, odpowiednio dobierając parametry zgodnie z (10), zapewnimy spełnienie celu sterowania w postaci warunku (5), a dodatkowo ograniczymy pochodną uchybu śledzenia zgodnie z (15). W stanie quasi-ustalonym (po kilku stałych czasowych $\frac{1}{\mu}$) ograniczymy uchyb śledzenia do $\alpha_\infty = \frac{\alpha_{r\infty}}{\lambda}$, a jego pochodną do $2\alpha_{r\infty}$.

Sterowanie uchybem zagregowanym

Przyjmijmy, że w przedziale czasu $0 \leq t < t_1$ ograniczenie (9) jest spełnione. Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1



Rys.1. Naruszenie ograniczeń

W chwili t_1 uchyb zagregowany $r(t)$ przecina ograniczenie $A_r(t)$ od dołu (rys.1), czyli tak, że $r(t) - A_r(t)$ rośnie do 0 poprzez liczby ujemne (lewostronnie):

$$(16) \quad r(t) - A_r(t) \underset{t \rightarrow t_1}{\nearrow} 0^-.$$

W pewnym przedziale $t_1 - \delta < t \leq t_1$ mamy więc

$$(17) \quad \dot{r}(t) - \dot{A}_r(t) > 0 \Rightarrow \dot{r}(t) > -\mu \alpha_r e^{-\mu t},$$

a w szczególności

$$(18) \quad \dot{r}(t_1) > -\mu \alpha_r e^{-\mu t_1} > -\mu \alpha_r.$$

Przypadek 2

W chwili t_1 uchyb zagregowany $r(t)$ przecina ograniczenie $-A_r(t)$ od góry (rys.1), czyli tak, że $r(t) + A_r(t)$ maleje do 0 poprzez liczby dodatnie (prawostronnie):

$$(19) \quad r(t) + A_r(t) \underset{t \rightarrow t_1}{\searrow} 0^+.$$

W pewnym przedziale $t_1 - \delta < t \leq t_1$ mamy więc

$$(19) \quad \dot{r}(t) + \dot{A}_r(t) < 0 \Rightarrow \dot{r}(t) < \mu \alpha_r e^{-\mu t},$$

a w szczególności

$$(20) \quad \dot{r}(t_1) < \mu \alpha_r e^{-\mu t_1} < \mu \alpha_r.$$

Jeżeli uchyb zagregowany znajduje się we wnętrzu ograniczenia (9), to cel sterowania jest spełniony niezależnie od aktualnej wartości sterowania. Za dynamikę i dokładność śledzenia odpowiada ograniczenie (9), a

jedynym zadaniem sterowania jest zapewnienie, że żadna z sytuacji opisanych jako Przypadek 1 i Przypadek 2 nie wystąpi.

Dynamika uchybu zagregowanego jest opisana równaniem:

$$(21) \quad \dot{r}(t) = \lambda \dot{e}_1(t) + \ddot{e}_1(t),$$

czyli, zgodnie z (1)

$$(22) \quad \dot{r}(t) = \lambda \dot{e}_1(t) + f(x) + g(x)u + d - \ddot{x}_{1d}(t).$$

Niech sterowanie będzie ograniczoną, gładką funkcją zależną od $r(t)$, $A_r(t)$, spełniającą warunki:

$$(23) \quad |u(t)| \leq U,$$

$$(24) \quad r(t) - A_r(t) \underset{t \rightarrow t_1}{\nearrow} 0^- \Rightarrow u(t) \underset{t \rightarrow t_1}{\longrightarrow} -U,$$

$$(25) \quad r(t) + A_r(t) \underset{t \rightarrow t_1}{\searrow} 0^+ \Rightarrow u(t) \underset{t \rightarrow t_1}{\longrightarrow} U.$$

Można zaproponować wiele funkcji spełniających warunki (23-25), jednym z przykładów jest:

$$(26) \quad u(t) = -\frac{2U}{\pi} \arctan \left(K \tan \frac{\pi r(t)}{2A_r(t)} \right),$$

gdzie $K > 0$ odpowiada za kształt funkcji (26) przy zmianie $r(t)$.

Z warunków (3) oraz (24) i (25) wynikają implikacje:

$$(27) \quad r(t) - A_r(t) \underset{t \rightarrow t_1}{\nearrow} 0^- \Rightarrow -g_m U \leq \lim_{t \rightarrow t_1} g(x(t))u(t) \leq -g_m U,$$

$$(28) \quad r(t) + A_r(t) \underset{t \rightarrow t_1}{\searrow} 0^+ \Rightarrow g_m U \leq \lim_{t \rightarrow t_1} g(x(t))u(t) \leq g_m U.$$

Przy spełnieniu założeń wniosku 1, a w szczególności ograniczenia (9), każdy z niezależnych od sterowania składników w równaniu (22) jest ograniczony:

- z uwagi na (15):

$$(29) \quad \lambda |\dot{e}_1(t)| \leq \lambda \alpha_r \left(1 + \frac{\lambda \alpha_r}{\lambda - \mu} \right) + 2\lambda \alpha_{r\infty} =: E,$$

- funkcja $f(x) = f(x_1, x_2) = f(x_{1d} + e_1, \dot{x}_{1d} + \dot{e}_1)$ jest określona na ograniczonym zbiorze argumentów (z uwagi na założenia o x_{1d} , \dot{x}_{1d} oraz (14) i (15)), więc z założenia jest ograniczona:

$$(30) \quad |f(x)| \leq F,$$

- z założenia (2) zakłócenie d jest ograniczone: $|d| \leq D$,
- z założenia przyspieszenie związane z zadaną trajektorią jest ograniczone: $|\ddot{x}_{1d}(t)| \leq A_2$.

Tak więc z (22) można wnioskować, że

$$(31) \quad \dot{r}(t) \leq M + g(x)u,$$

$$(32) \quad -M + g(x)u \leq \dot{r}(t),$$

gdzie

$$(33) \quad M = E + F + D + A_2.$$

Niech ograniczenie sterowania spełnia warunki

$$(34) \quad U > \frac{M + \mu \alpha_r}{g_m} \geq \frac{M + \mu \alpha_r}{g_m}.$$

Jeżeli założymy wystąpienie Przypadku 1, to zgodnie z (27) i (31) mamy

$$(35) \quad r(t) - A_r(t) \underset{t \rightarrow t_1}{\overset{\nearrow}{\searrow}} 0^- \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_1} \dot{r}(t) \leq M + \lim_{t \rightarrow t_1} g(x(t))u(t) \\ \leq M - g_m U \leq M - g_m \frac{M + \mu \alpha_r}{g_m} = -\mu \alpha_r,$$

co jest sprzeczne z (18). Przypadek 1 nie może więc wystąpić.

Jeżeli założymy wystąpienie Przypadku 2, to zgodnie z (28) i (32) mamy

$$(36) \quad r(t) + A_r(t) \underset{t \rightarrow t_1}{\overset{\searrow}{\nearrow}} 0^+ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_1} \dot{r}(t) \geq -M + \lim_{t \rightarrow t_1} g(x(t))u(t) \\ \geq -M + g_m U \geq -M + g_m \frac{M + \mu \alpha_r}{g_m} = \mu \alpha_r,$$

co jest sprzeczne z (20). Przypadek 2 nie może więc wystąpić.

Podsumowując przedstawione rozumowanie można sformułować wniosek:

Wniosek 2

Jeżeli w chwili początkowej $t = 0$ spełnione są warunki (5) i (9), przy czym parametry tych ograniczeń są powiązane zależnością (10), jeżeli jest stosowane sterowanie spełniające warunki (23-25) oraz (34), to zadana trajektoria położenia jest śledzona, przy czym błąd śledzenia dla $t > 0$ utrzymuje się w ograniczeniu (5), a jego pochodna spełnia ograniczenie (15). Ponadto zagregowany błąd śledzenia spełnia ograniczenie (9).

Badania symulacyjne

Rozważmy model silnika połączonego sztywnym wałem z masywnym ramieniem (rys.2) został opisany równaniami

$$(37) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ J\dot{x}_2 &= -T_f(x_2) - cx_2 - b \sin x_1 + k_0 i_r + \hat{d}. \end{aligned}$$



Rys.2. Stanowisko laboratoryjne

Zakłócenie \hat{d} reprezentuje błędy w modelowaniu (np. tarcia lub nieuwzględnionej dynamiki prądu). Równanie (37) sprowadzi się do

$$(38) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u + d, \end{aligned}$$

gdzie

$$(39) \quad u = i_r, f(x) = \frac{-T_f(x_2) - cx_2 - b \sin x_1}{J}, g(x) = \frac{k_0}{J}, d = \frac{\hat{d}}{J}.$$

Parametry układu są następujące: $J = 0,027[kgm^2]$, $b = 1,34[Nm]$, $c = 0,009[Nms/rad]$, $T_f = 0,02 \tanh(100x_2)[Nm]$, $k_0 = 0,147 [Nm/A]$.

Przykład 1 – układ idealny

Nakładamy ograniczenie błędu śledzenia położenia e_1 za pomocą nierówności (5) dla $\alpha = 1 [rad]$, $\alpha_\infty = 0,01 [rad]$, $\mu = 0,5 [s^{-1}]$, które implikuje $|e_1(0)| \leq 1,01$ oraz $|e_1(t)| \leq 0,01$ dla $t \rightarrow \infty$, przy zanikaniu ze stałą czasową $T \leq \frac{1}{\mu} = 2 [s]$. Po przyjęciu parametru projektowego $\lambda = 2 [s^{-1}]$, zgodnie z (10) wyznaczamy $\alpha_r = 1,5$, $\alpha_{r\infty} = 0,02$. Przyjęto trajektorię zadaną $x_{1d}(t)$ jako funkcję $\frac{3\pi}{4}(1 - \cos(t))$ przepuszczoną przez filtr inercyjny II rzędu o stałej czasowej $T = 0,1 [s]$. Taka trajektoria zadana spełnia warunki $|\dot{x}_{1d}| \leq \frac{3\pi}{4}$, $|\ddot{x}_{1d}| \leq \frac{3\pi}{4}$. Jeżeli układ pracuje przy spełnionych ograniczeniach (9), to, jak wynika z (15), prędkość spełnia ograniczenie

$$(40) \quad |x_2(t)| \leq |\dot{x}_{1d}(t)| + |\dot{e}_1(t)| \\ \leq \max_{t \geq 0} \left\{ |\dot{x}_{1d}(t)| + \alpha_r \left(1 + \frac{\lambda \alpha_r}{\lambda - \mu} \right) e^{-\mu t} + 2\alpha_{r\infty} \right\}.$$

Oszacowanie prędkości, przyspieszenia i przyjęte parametry pozwalają na oszacowanie składników równania (33) $E = 9,08$, $A_2 = 2,35$ oraz $F = 51,24$ (jako sumy pochodzącej od maksymalnego tarcia statycznego $|T_f(x_2)| \leq 0,75$, tarcia lepkiego $|cx_2| < 0,79$ i momentu grawitacyjnego $|b \sin x_1| \leq 49,7$), a dalej wartości $M = 62,67$. Można teraz wyznaczyć minimalną konieczną wartość sterowania $U_{min} = 11,65 [A]$ (34). Uzyskana wartość jest konserwatywna, przy jej wyliczeniu nie bierze się pod uwagę zależności między oddzielnie szacowanymi składnikami.

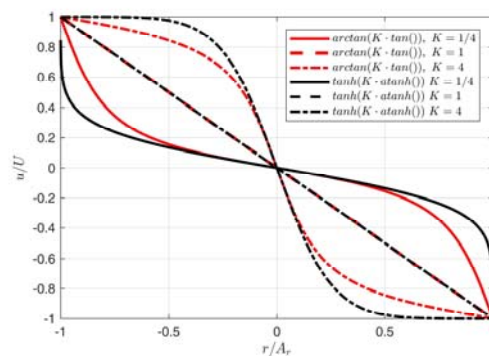
W przykładzie założono, że układ jest idealny, tzn. nie występują błędy oszacowania parametrów, modelowania, pomiarowe wynikające np. z kwantyzacji położenia czy z istnienia nieuwzględnionych dodatkowych inercji np. regulatora pętli prądowej, co przełożyło się na $D = 0$ w równaniu (33) i $g_m = g_M = g$ w (34). Porównano dwa sterowania spełniające warunki (23-25):

$$(41) \quad u(t) = i_r(t) = -\frac{2U}{\pi} \arctan \left(K \tan \frac{\pi r(t)}{2A_r(t)} \right)$$

oraz

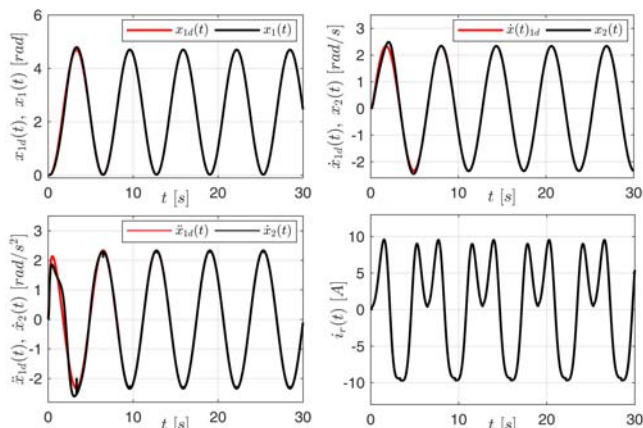
$$(42) \quad u(t) = i_r(t) = -U \tanh \left(K \operatorname{atanh} \frac{r(t)}{A_r(t)} \right),$$

w których parametr K pozwala na wybór kształtu krzywej u/U w funkcji r/A_r , co pokazano na rysunku 3.



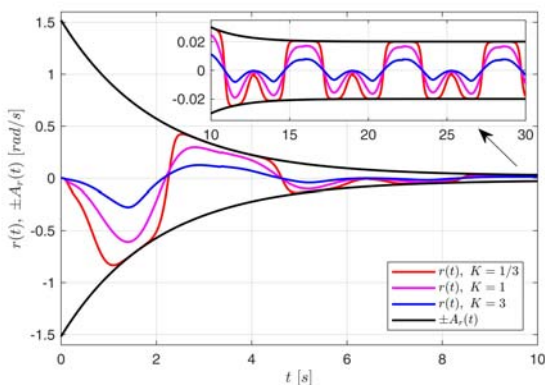
Rys.3. Kształt krzywej sterowania u w zależności od parametru K dla zaproponowanych funkcji

Na rysunku 4 przedstawiono zadaną trajektorię położenia wraz z jej wyższymi pochodnymi oraz aktualne położenie, prędkość i przyspieszenie ramienia. Wyniki zostały zarejestrowane dla sterowania (41), przy $U = 11,65A$, $K = 1$. Prąd silnika nie przekracza 10A.

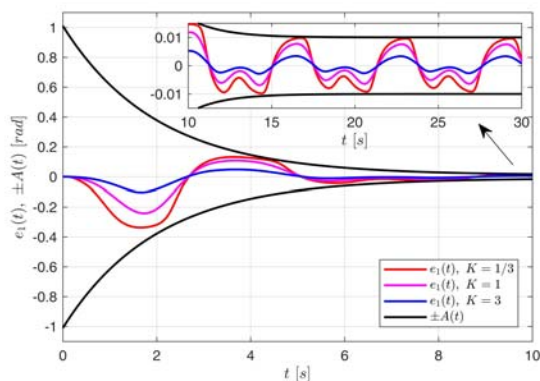


Rys.4. Położenia zadane x_{1d} , jego pochodne \dot{x}_{1d} , \ddot{x}_{1d} , aktualne położenie x_1 , prędkość \dot{x}_2 , przyspieszenie \ddot{x}_2 i sterowanie i_r (prąd zadany silnika)

Na rysunkach 5 i 6 zostały przedstawione uchyby: zagregowany $r(t)$ i śledzenia $e_1(t)$, dla różnych wartości wzmacnienia K , na tle ograniczeń $A_r(t)$, $A(t)$. Zgodnie z rysunkiem 3, dla mniejszych wartości K sterowanie rośnie istotnie przy samym ograniczeniu, zbliżając się dopiero wtedy do wartości maksymalnej sterowania. W skutek tego, uchyb $r(t)$ zbliża się bardzo do ograniczenia $A_r(t)$.



Rys.5. Ograniczenie $A_r(t)$ i uchyb zagregowany $r(t)$ dla sterowania (41), dla różnych wartości K



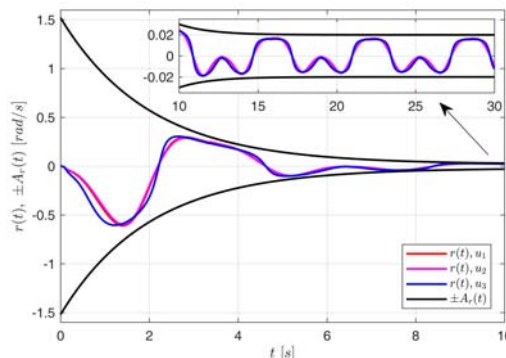
Rys.6. Ograniczenie $A(t)$ i uchyb śledzenia $e_1(t)$ dla sterowania (42), dla różnych wartości K

Na rysunku 7 przedstawiono uchyby zagregowane dla dwóch sterowań (41) i (42) dla różnych wartości U . Testowane kombinacje zestawiono w tabeli 2.

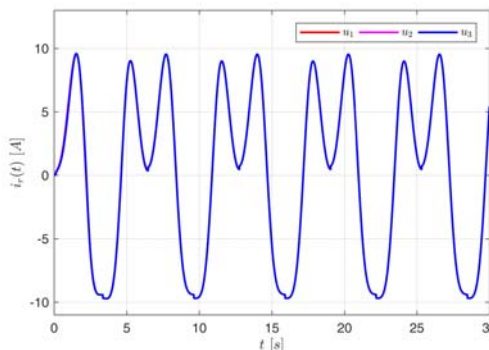
Otrzymane wyniki pokazują, że niezależnie od funkcji sterowania i zastosowanej wartości maksymalnej U można uzyskać bardzo podobne przebiegi odpowiednio dobierając parametr K . Dla opisanych przypadków zamieszczono także przebieg sterowania $i_r(t) = u_i(t)$ dla $i = 1,2,3$ (rys.8).

Tabela 2. Sterowania generujące przebiegi przedstawione na rysunku 8.

| | K | Prawo sterowania | U |
|-------|------|------------------|-------|
| u_1 | 1 | (41) | 11,65 |
| u_2 | 1.1 | (42) | 11,65 |
| u_3 | 0.27 | (42) | 23,30 |



Rys.7. Zagregowane uchyby $r(t)$ dla różnych funkcji sterowań i ograniczeń U



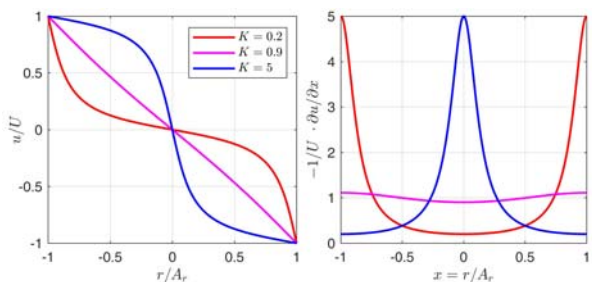
Rys.8. Sterowanie $i_r(t)$ dla różnych funkcji sterowań i ograniczeń U

Przykład 2

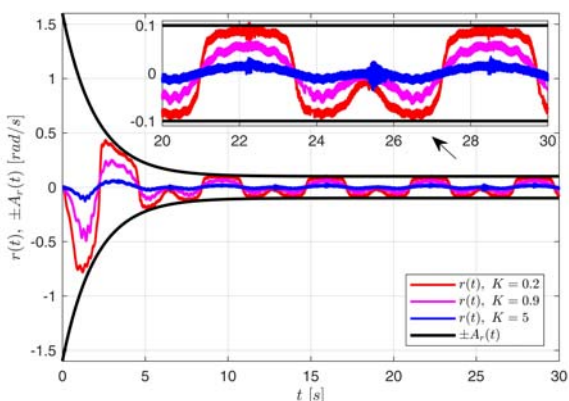
Układ rozważany w przykładzie 1 zmodyfikowano, zakładając dodatkowo, że:

- bezwładność układu została oszacowana z błędem $\pm 20\%$,
 - stała moment/prąd silnika zmienia się wraz z kątem obrotu silnika $k(x_1) = k_0(1 + 0,1\sin(6x_1))$ co jest efektem nierównomierności pola magnetycznego
 - pomiar położenia jest prowadzony za pomocą enkodera o rozdzielczości 8192 impulsów/obrot,
 - prędkość jest wyliczana z użyciem bloku różniczkującego ze stałą czasową 50 ms, w oparciu o nieciągły pomiar położenia,
 - stała czasowa regulacji pętli prądowej wynosi 0,1 ms
- Pierwsze dwa czynniki będą miały wpływ na wartość g_m w oparciu o którą wyznacza się U_{min} (w nowych warunkach $g_m = 4,08$). Wprowadzenie kwantyzacji pomiaru położenia spowoduje kwantyzację błędu położenia e_1 i wprowadzi istotny szum do sygnału prędkości, który przeniesie się do sygnału $r(t)$. Z tego powodu nie będzie możliwe utrzymanie dokładności w stanie quasi-ustalonym na dotychczasowym poziomie. Na podstawie zarejestrowanego przebiegu prędkości oceniono, że realną do uzyskania wielkością jest $\alpha_{r\infty} = 0,1$ [rad/s]. Błąd realizacji prądu przez regulator

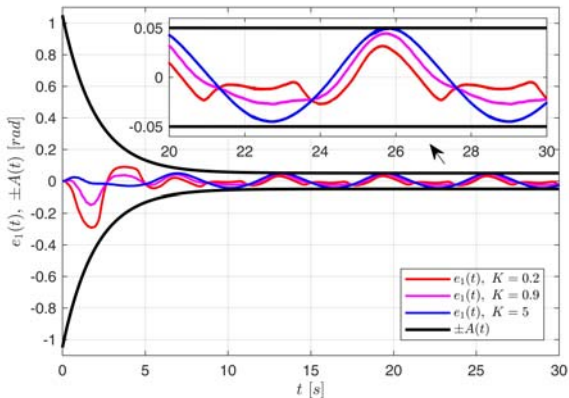
prądu wynosi nie więcej niż 0,5 [A], który potraktowany jako zakłócenie wprowadzi składnik $D = 3,59 \text{ [rad/s}^2\text{]}$ do zależności (33), wg której nowa wartość $M = 79,28 \text{ [rad/s}^2\text{]}$. Ta zmiana, łącznie ze zmodyfikowaną wartością $\alpha_{r\infty}$ daje wyznaczone wg (34) ograniczenie sterowania $U \geq 19,6 \text{ [A]}$.



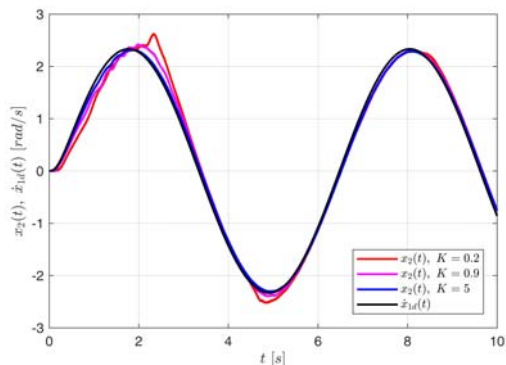
Rys.9. Kształt krzywej sterowania u i jej stromość



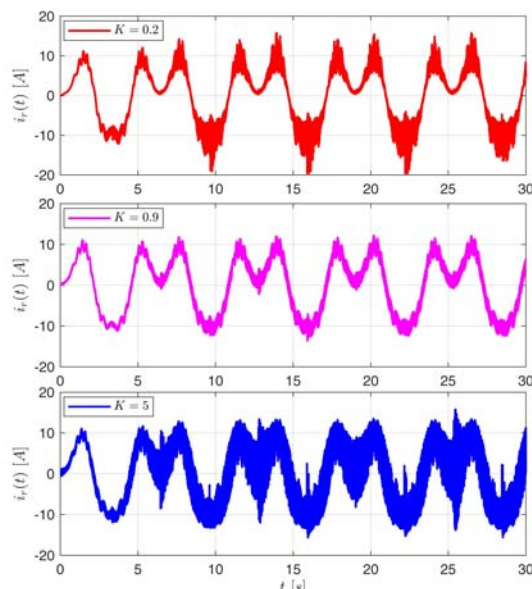
Rys.10. Ograniczenie $A_r(t)$ i uchyb zagregowany $r(t)$ dla sterowania (41), dla różnego K



Rys.11. Ograniczenie $A(t)$ i uchyb śledzenia $e_1(t)$ dla sterowania (41), dla różnego K



Rys.12. Prędkość $x_2(t)$ i pochodna położenia zadanego $\dot{x}_{1d}(t)$ dla sterowania (41), dla różnego K



Rys.13. Sterowanie (41), dla różnego K

Symulację przeprowadzono dla sterowania (41) dla różnych wartości parametru $K = [0,2; 0,9; 5]$, dla których krzywe sterowania oraz ich pochodne pokazano na rysunku 9. Na rysunkach 10-13, przedstawiono kolejno przebiegi: uchybów zagregowanych $r(t)$ i śledzenia położenia $e_1(t)$ na tle odpowiadających im ograniczeń, oraz prędkości i sterowań.

Wrz ze zmniejszaniem parametru K charakterystyka regulatora coraz bardziej przypomina wzmacniacz ze strefą martwą. Dla $K = 0,2$, z dala od ograniczeń, sterowanie i jego przyrosty są niewielkie. Powoduje to swobodny ruch wartości uchybu zagregowanego r w kierunku bariery. Reakcję układu widać dopiero blisko ograniczeń, gdy sterowanie szybko musi wzrosnąć, co wiąże się z dużymi wzmocnieniami, a te z kolei są powodem dużego „szumu” w sygnale sterowania (rys.13 dla $K = 0,2$). W tym przypadku zarejestrowano największe skoki prędkości (rys. 12).

Dla dużego wzmocnienia ($K = 5$) sytuacja jest odmienna. Nawet niewielkie odchylenie uchybu r od zera powoduje gwałtowną reakcję układu w postaci silnego wzrostu sterowania. Praca ta choć z dala od ograniczenia przypomina pracę przekąźnikową, z którą także powiązane będzie „zaszumienie” sterowania.

Najlepszym wyborem okazało się K bliskie jedności. Sterowanie zwiększane jest proporcjonalnie wraz ze zbliżaniem się zagregowanego uchybu r do ograniczenia. W układzie tym zarejestrowano sterowanie o najmniejszej amplitudzie i zawartości szumu, co przekłada się na koszt sterowania (Tabela 3).

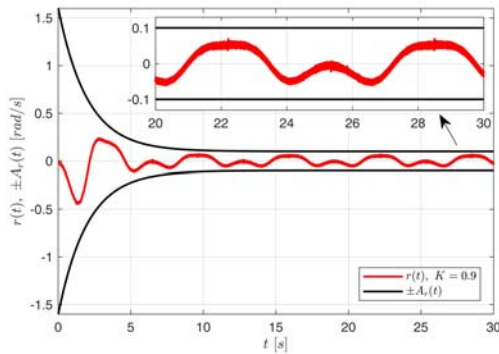
Tabela 3. Parametry sygnału sterującego dla różnej wartości K

| K | $\int_0^{30} i_r(t)^2 dt$ | $\max(i_r)$ |
|-----|---------------------------|---------------|
| 0.2 | 730 | 19.6 |
| 0.9 | 717 | 13.6 |
| 5 | 875 | 15.8 |

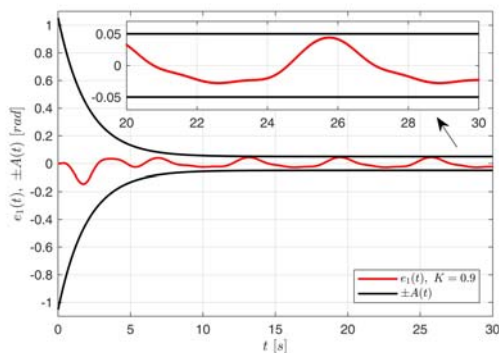
Testy na stanowisku laboratoryjnym

Zdjęcie rzeczywistego napędu z ciężkim ramieniem, na którym uruchomiono algorytm sterowania zostało pokazane na rysunku 2. Zastosowano silnik firmy Kolmorgen AKM2G-41-P z enkoderem o rozdzielczości $2\pi/2^{13}$, zasilany z falownika Kolmorgen AKD-T02406, z wbudowanym regulatorem PI prądu ograniczonym (z uwagi na silnik) do 19,9 [A]. Parametry układu i silnika odpowiadają przedstawionym w przykładzie 2. Algorytm uruchomiono na

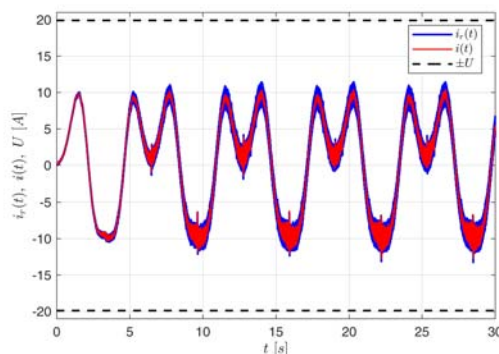
platformie MicroLabBox DS1202. Czas próbkowania wynosił 50 μ s. Zastosowano sterowanie (41), dla $K = 0,9$.



Rys.14. Ograniczenie $A_r(t)$ i uchyb zagregowany $r(t)$



Rys.15. Ograniczenie $A(t)$ i uchyb śledzenia $e_1(t)$

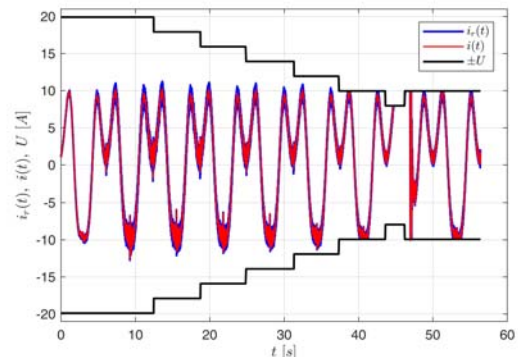


Rys.16. Sterowanie $i_r(t)$, rzeczywisty prąd silnika $i(t)$ i ograniczenia sterowania U

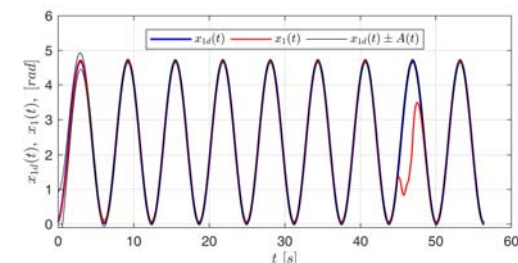
Uruchomienie zaproponowanego algorytmu w układzie rzeczywistym nie stwarzało problemów. Otrzymane wyniki (rys.14-16) pokazują dużą zgodność z wynikami otrzymanymi podczas symulacji. W układzie rzeczywistym nie zauważono tętnień prądu, jak było to widoczne w przebiegach zebranych podczas symulacji, w których najwyraźniej przeszacowano zmienność funkcji g i wynikające z tego faktu zakłócenie. Z drugiej strony w układzie rzeczywistym w różnym stopniu występowały dodatkowe zakłócenia, które nie były rozpatrywane podczas symulacji (np. nie idealnie inercyjny charakter pętli regulacji prądu, dyskretne w czasie działanie algorytmu, sprężystość sprzęgła, niedokładny model tarcia pomijający jego dynamikę czy efekt Stribecka).

Sprawdzono także działanie układu w sytuacji, w której nie udało się zapewnić sterowania potrzebnego do prawidłowego działania układu. Maksymalne sterowanie U występujące we wzorze (41) było co kilka sekund obniżane o 10% w stosunku do początkowej, oszacowanej wartości (rys.17). Przez długi czas (do chwili 45s) śledzenie trajektorii zadanej odbywa się założoną dokładnością (rys.18), aczkolwiek widać, że uchyb zagregowany z

każdym zmniejszeniem zapasu sterowania zbliża się do ograniczeń (rys.19). W 45 sekundzie pracy układu, zbyt mała wartość U nie pozwala na pokonanie przeciwnie działających momentów sił (głównie grawitacyjnego) i następuje odpadnięcie od trajektorii położenia zadanego. Przywrócenie wcześniejszego poziomu sterowania (maksymalnego) pozwala na natychmiastowy powrót układu do dokładnego śledzenia.



Rys.17. Sterowanie $i_r(t)$, rzeczywisty prąd silnika $i(t)$ i ograniczenia sterowania U , gdy nie zapewniono odpowiedniej wartości sterowania U



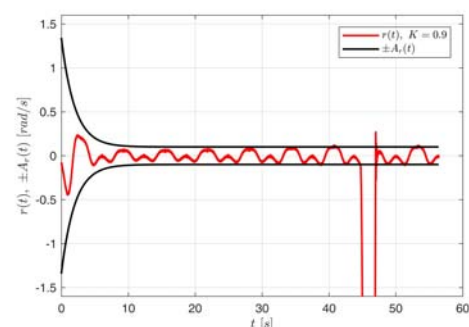
Rys.18. Ograniczenie $A_r(t)$ i uchyb zagregowany $r(t)$, gdy nie zapewniono odpowiedniej wartości sterowania U

Taką, odporną pracę układu uzyskano dzięki zastosowaniu zamiast wzoru (41) prawa sterowania

(43)

$$u(t) = i_r(t) = -\frac{2U}{\pi} \arctan \left(K \tan \left(\frac{\pi}{2} \text{sat}_{1-\epsilon} \left(\frac{r(t)}{A_r(t)} \right) \right) \right),$$

gdzie $\text{sat}_{1-\epsilon}(\cdot)$ jest funkcją ograniczającą moduł argumentu do wartości $1 - \epsilon$ maszynowy.



Rys.19. Ograniczenie $A_r(t)$ i uchyb zagregowany $r(t)$, gdy nie zapewniono odpowiedniej wartości sterowania U

Wnioski

W artykule przedstawiono prosty, odporny regulator położenia serwonapędu, wykorzystujący tylko wiedzę o strukturze nieliniowego modelu i ograniczeniach spełnianych przez poszczególne składniki. Zaproponowane sterowanie polega na właściwej reakcji w przypadku, gdy trajektoria zagregowanego uchybu położenia i prędkości zbliża się do bariery, której kształt odpowiada za narzucone

właściwości przebiegu przejściowego i quasi-ustalonego w napędzie. Przedstawiona metoda pozwala na wyznaczenie maksymalnego sterowania koniecznego do zrealizowania celu sterowania przy istniejących warunkach początkowych i przy wybranej trajektorii zadanej. Podano warunki jakie ma spełniać sterowanie oraz zaproponowano dwie przykładowe, sparametryzowane funkcje spełniające te wymagania.

Badania symulacyjne pokazały, że postawiony cel sterowania można osiągnąć niezależnie od wyboru funkcji sterowania i jej parametryzacji, byleby tylko spełnione były warunki (23-25) oraz (34). Jednak w przypadku układu rzeczywistego, z nieidealnym torem pomiarowym, wprowadzającym dodatkową inercję i szum, parametryzacja sterowania istotnie wpływa nie tylko na przebiegi położenia i prędkości w stanie quasi-ustalonym ale i na amplitudę oraz jakość sygnału sterującego.

Zaproponowany algorytm sterowania bez przeszkód uruchomiono w układzie rzeczywistym. Szybkie przygotowanie algorytmu do uruchomienia wynika z jego prostoty. Po założeniu parametrów wymaganych ograniczeń błędu śledzenia strojenie regulatora sprowadza się do wyboru dostatecznie dużej wartości U , co zostało dokładnie zaprezentowane w części teoretycznej pracy.

Mimo, że sterowanie dotyczy układu o nieznanach parametrach, zaproponowane podejście nie wykorzystuje metod sterowania adaptacyjnego, nie używa metod Lapunowa do udowodnienia stabilności i w bardzo ograniczony sposób korzysta z wiedzy o modelu obiektu.

Sterowanie nie wykorzystuje członu całkującego, typowego dla układów nadążnych. Nie ma więc konieczności implementacji elementu całkującego w układzie rzeczywistym, co często nie jest trywialne. Nie trzeba też zmagać się z efektami pojawiającymi się przy pracy na ograniczeniach sterowania, co wymusza konieczność stosowania specjalnych rozwiązań (np. anti-windup) w regulatorze PI, ograniczania adaptowanych parametrów w układach adaptacyjnych, czy też kasowania błędów układów całkujących po awarii, np. takiej jak utrata zasilania.

Zaproponowany regulator daje się łatwo stroić podczas pracy, a ewentualnie źle dobrane parametry sterowania, lub błędy pomiaru mogły być korygowane on-line i nie pociągały za sobą konieczności uruchamiania procesu od nowa.

Te wszystkie cechy świadczące o prostocie implementacji pokazują duże możliwości aplikacyjne zaproponowanej metody sterowania.

Autorzy: dr hab. inż. Jacek Kabziński prof. PŁ, E-mail: jacek.kabzinski@p.lodz.pl; dr inż. Marcin Jastrzębski, E-mail: marcin.jastrzebski@p.lodz.pl; dr inż. Przemysław Mosiołek, E-mail: przemyslaw.mosiolek@p.lodz.pl; Politechnika Łódzka, Instytut Automatyki, ul. Stefanowskiego 18, 90-537 Łódź.

LITERATURA

- [1] Zhang J. H., Wang Q.-G., Sun J. T., On finite-time stability of nonautonomous nonlinear systems, *International Journal of Control*, 93 (2020), No. 4, 783–787
- [2] Huang X., Lin W., Yang B., Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems, *Automatica*, 41 (2005), No. 5, 881–888
- [3] Li S., Ahn C. K., Xiang Z., Command filter based adaptive fuzzy finite-time control for switched nonlinear systems using state-dependent switching method, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 29 (2021), No. 4, 833–845
- [4] H. Hou, X. Yu, L. Xu, K. Rsetam and Z. Cao, Finite-Time Continuous Terminal Sliding Mode Control of Servo Motor Systems, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 67 (2020), No. 7, 5647–5656
- [5] Wang B., Iwasaki M., Yu J., Finite-Time Command-Filtered Backstepping Control for Dual-Motor Servo Systems With LuGre Friction, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 19 (2023), No. 5, 6376–6386
- [6] Li K., Li Y., Adaptive neural network finite-time dynamic surface control for nonlinear systems, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 32 (2021), No. 12, 5688–5697
- [7] Na J., Herrmann G., Zhang K., Improving transient performance of adaptive control via a modified reference model and novel adaptation, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27 (2017), No. 8, 1351–1372
- [8] Yang J., Na J., Gao G. B., Robust model reference adaptive control for transient performance enhancement, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30 (2020), No. 15, 6207–6228
- [9] Bechlioulis C. P., Rovithakis G. A., A low-complexity global approximation free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems, *Automatica*, 50 (2014), No. 4, 1217–1226
- [10] Zhang J. X., Yang G. H., Robust adaptive fault-tolerant control for a class of unknown nonlinear systems, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64 (2017), No. 1, 585–594
- [11] Wang S., Nonlinear Uncertainty Estimator-Based Robust Control for PMSM Servo Mechanisms With Prescribed Performance, *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, 9 (2023), No. 2, 2535–2543
- [12] Ilchmann A., Ryan E. P., Townsend P., Tracking with prescribed transient behavior for nonlinear systems of known relative degree, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46 (2007), No. 1, 210–230
- [13] Ilchmann A., Ryan E. P., Trenn S., Tracking control: Performance funnels and prescribed transient behavior, *Systems & Control Letters*, 54 (2005), No. 7, 655–670
- [14] Cheng Y., Ren X., Zheng D., Li L., Non-Linear Bandwidth Extended-State-Observer Based Non-Smooth Funnel Control for Motor-Drive Servo Systems, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 69 (2022), No. 6, 6215–6224
- [15] Esterhuizen W., Wang Q.-G., Control design with guaranteed transient performance: An approach with polyhedral target tubes, *Automatica*, 119 (2020)
- [16] Esterhuizen W., Wang Q.-G., Finite-time stability and stabilization with polyhedral domains for linear systems, *International Journal of Control*, 93 (2020), No. 9, 2086–2094
- [17] Brock S., Sterowanie ślizgowe zapewniające zbieżność uchybu w skończonym czasie dla napędu bezpośredniego, *Przegląd Elektrotechniczny*, 5 (2016), 124–129
- [18] Brock S., Hybrid P–PI sliding mode position and speed controller for variable inertia drive, *Przegląd Elektrotechniczny*, 5 (2014), 29–34
- [19] Żychlewicz M., Stanisławski R., Szrek J., Malarczyk M., Kamiński M., Rozmyty regulator stanu układu dwumasowego, *Przegląd Elektrotechniczny*, 3 (2023), 53–59
- [20] Kabziński, J., Mosiołek, P., Jastrzębski, M. Adaptive Position Tracking with Hard Constraints—Barrier Lyapunov Functions Approach, *Advanced Control of Electrical Drives and Power Electronic Converters. Studies in Systems, Decision and Control*, 75 (2017), Springer
- [21] Kabziński J., Mosiołek P., Adaptive, nonlinear state transformation-based control of motion in presence of hard constraints, *Bulletin Of The Polish Academy Of Sciences Technical Sciences*, 68 (2020), No. 5
- [22] Kabziński, J.; Mosiołek, P., Observer-Based, Robust Position Tracking in Two-Mass Drive System, *Energies* 15 (2022)
- [23] Jastrzębski M., Kabziński J., Mosiołek P., Finite-Time, Robust, and Adaptive Motion Control with State Constraints: Controller Derivation and Real Plant Experiments, *Energies*, 15 (2022)