

O estymacji wartości średniej napięcia sinusoidalnego

Streszczenie. W artykule oceniono dokładność wyników estymacji wartości średniej napięcia sinusoidalnego. W tym celu zastosowano estymator wartości średniej obliczany na podstawie próbek napięcia. Wyznaczono obciążenie, wariancję i błąd średniokwadratowy estymatora.

Abstract. The article evaluates the accuracy of the estimating results of the mean value of a sinusoidal voltage. For this purpose, a mean value estimator calculated from voltage samples has been used. The bias, the variance and the mean squared error of an estimator have been determined. (On the mean value estimation of a sinusoidal voltage).

Słowa kluczowe: wartość średnia, napięcie sinusoidalne, obciążenie, wariancja, błąd średniokwadratowy.

Keywords: mean value, sinusoidal voltage, bias, variance, mean squared error.

Wstęp

Wartość średnia to jedna z najczęściej wyznaczanych wielkości w nauce i technice. Oblicza się ją w statystyce, probabilistyce i ekonometrii podczas analizy danych i badania stacjonarności procesów losowych. Stosuje się ją również w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów podczas analizy czasowej i korelacyjnej sygnałów oraz filtracji cyfrowej. Jest ona również obliczana w elektrotechnice podczas wyznaczania parametrów napięcia i prądu elektrycznego, a także w metrologii i fizyce podczas oceny niepewności wyników pomiarów. Wartość średnia daje pojęcie o spodziewanej wartości określonej wielkości. Jest to również jedna z podstawowych miar tendencji centralnej.

W artykule oceniono dokładność wyników estymacji wartości średniej napięcia sinusoidalnego. W tym celu zastosowano estymator tego parametru obliczany na podstawie próbek napięcia. Wyznaczono obciążenie, wariancję, a następnie błąd średniokwadratowy estymatora. Wyniki błędów porównano z otrzymanymi metodą klasyczną na podstawie wyników szacowania wartości średniej [1], metodą Bienaimé [2] oraz na podstawie nierówności informacyjnej Craméra-Rao [3].

Ten artykuł jest rozszerzoną i uzupełnioną wersją referatu wygłoszonego na XIV Konferencji Naukowej „Systemy pomiarowe w badaniach naukowych i w przemyśle” SP’2022 i opublikowanego w materiałach konferencyjnych [4].

Wartość średnia

Wartość średnią m_u okresowego przebiegu czasowego $u(t)$ obliczamy na podstawie wzoru:

$$(1) \quad m_u = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt,$$

gdzie T to okres tego przebiegu, t_0 to czas początkowy.

Niech $u(t)$ będzie napięciem sinusoidalnym (harmonicznym lub o jednym tonie):

$$(2) \quad u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

o amplitudzie U_m , pulsacji ω i fazie początkowej φ . Jeżeli $t_0 = 0$, to:

$$(3) \quad m_u = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = 0.$$

Dalej w pracy przyjęto, że (3) to prawdziwa wartość średnia mierzonego napięcia.

Estymator wartości średniej

Oznaczmy przez:

$$(4) \quad u_q(t) = U_0 + u(t) + q(t)$$

napięcie, które jest sumą napięcia $u(t)$, składowej stałej U_0 oraz addytywnego szumu Gaussa $q(t)$ o odchyleniu standardowym σ_q . Załóżmy, że (4) to model mierzonego napięcia. Ponadto przyjmijmy, że $u(t)$ i $q(t)$ są niezależne oraz, że wyrażony w decybelach (dB) stosunek $u(t)$ do $q(t)$ wynosi:

$$(5) \quad \text{SNR} = 10 \log \left(\frac{U_m^2}{2\sigma_q^2} \right).$$

Załóżmy, że $u_q(t)$ został spróbkowany równomiernie z częstotliwością próbkowania f_s . W wyniku tej operacji otrzymano M próbek:

$$(6) \quad u_q[n] = U_0 + u[n] + q[n],$$

napięcia $u_q(t)$, przy czym:

$$(7) \quad u[n] = U_m \sin(\omega_0 n + \varphi), \quad n = 0, 1, \dots, M-1,$$

gdzie $\omega_0 = \omega f_s$.

Na podstawie (6) można obliczyć następującą wielkość:

$$(8) \quad m_{u_q} = \frac{u_q[0] + u_q[1] + \dots + u_q[M-1]}{M} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} u_q[n].$$

Wzór (8) to estymator wartości średniej m_u . W dalszej części pracy wyznaczono błędy tego estymatora.

Błędy estymatora

Przyjmijmy $a = U_m$, $b = U_0$ i rozważmy w pierwszej kolejności n -tą próbkę:

$$(9) \quad u_0[n] = b + a \sin(\omega_0 n + \varphi),$$

napięcia $u_0(t) = U_0 + u(t)$.

Występującą w (9) fazę φ można utożsamić ze zmienną losową o rozkładzie równomiernym na przedziale $[0; 2\pi]$, co jest równoznaczne z zapisem $\varphi \sim U[0; 2\pi]$. Wówczas φ ma gęstość:

$$(10) \quad p_\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ 0, & x < 0 \vee x > 2\pi. \end{cases}$$

Jeżeli (9) przekształcimy względem φ , to otrzymamy dwa równorzędnne rozwiązania:

$$(11) \quad \varphi_1 = -\sin^{-1}\left(\frac{b-u_0[n]}{a}\right) - \omega_0 n, \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_1 - \omega_0 n.$$

Uzmienniając (11) względem $u_0[n]$ otrzymujemy:

$$(12) \quad \varphi_1(x) = -\sin^{-1}\left(\frac{b-x}{a}\right) - \omega_0 n, \quad \varphi_2(x) = \pi - \varphi_1(x) - \omega_0 n.$$

Wtedy różniczkując (12) względem x mamy:

$$(13) \quad \frac{d}{dx} \varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - (b-x)^2}}, \quad \frac{d}{dx} \varphi_2(x) = -\frac{d}{dx} \varphi_1(x).$$

Próbka (9) jest funkcją fazy φ i jednocześnie zmienną losową. Uwzględniając, że dla ustalonego n , faza φ zmienia się w przedziale od 0 do 2π , gęstość zmiennej (9) można wyznaczyć na podstawie wzoru, który wynika z twierdzenia o przekształcaniu zmiennych losowych [1], tj.:

$$(14) \quad p_{u_0[n]}(x) = p_\varphi(\varphi_1(x)) \left| \frac{d}{dx} \varphi_1(x) \right| + p_\varphi(\varphi_2(x)) \left| \frac{d}{dx} \varphi_2(x) \right|.$$

Z (10) i (12) wynika, że:

$$(15) \quad p_\varphi(\varphi_1(x)) = p_\varphi(\varphi_2(x)) = \frac{1}{2\pi}.$$

Stąd na podstawie (13)-(15) otrzymujemy:

$$(16) \quad p_{u_0[n]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - (b-x)^2}}, & b-a < x < a+b, \\ 0, & b-a \geq x \vee a+b \leq x. \end{cases}$$

Jeżeli obliczymy transformatę Fouriera z (16), to otrzymamy funkcję charakterystyczną zmiennej (9), tj.:

$$(17) \quad \Phi_{u_0[n]}(v) = \int_{b-a}^{a+b} p_{u_0[n]}(x) e^{jvx} dx = J_0(av) e^{jvb}, \quad j = \sqrt{-1},$$

gdzie $J_0(\cdot)$ to funkcja Bessela rzędu zero. Zmienna (9) będzie miała tę samą gęstość i funkcję charakterystyczną również, gdy φ zostanie ustalona, a zmieniać się będzie n .

Na podstawie (17) można wyznaczyć momenty zwykłe pierwszego $E[u_0[n]]$ i drugiego $E[u_0^2[n]]$ rzędu oraz moment centralny $\text{Var}[u_0[n]]$ zmiennej (9), tj.:

$$(18) \quad E[u_0[n]] = -j \frac{d}{dv} \Phi_{u_0[n]}(v) \Big|_{v=0} = b,$$

$$(19) \quad E[u_0^2[n]] = -\frac{d^2}{dv^2} \Phi_{u_0[n]}(v) \Big|_{v=0} = \frac{a^2}{2} + b^2,$$

$$(20) \quad \text{Var}[u_0[n]] = E[u_0^2[n]] - E^2[u_0[n]] = \frac{a^2}{2},$$

gdzie $E[\cdot]$ to operator wartości oczekiwanej. Momenty (18)-(20) to wartość średnia, średniokwadratowa i wariancja zmiennej losowej (9).

Rozpatrzmy teraz funkcję próbek $u_0[n]$, tj.:

$$(21) \quad m_{u_0} = \frac{u_0[0] + u_0[1] + \dots + u_0[M-1]}{M} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} u_0[n].$$

Wzór (21) można przedstawić w następujący sposób:

$$(22) \quad m_{u_0} = b' + a' \sin\left(\frac{M-1}{2} \omega_0 + \varphi\right),$$

gdzie:

$$(23) \quad a' = \frac{1}{M} \frac{\sin(M\omega_0/2)}{\sin(\omega_0/2)} a, \quad b' = b.$$

Średnia (22) zależy od φ , zatem jest również zmienną losową. Porównując (9) i (22) można zauważyć, że dla zmieniającej się φ i ustalonych pozostałych argumentów funkcji sinus, gęstości i funkcje charakterystyczne obu zmiennych są analogiczne i zależą odpowiednio od a i b oraz a' i b' . Wtedy na podstawie (18)-(20) otrzymujemy:

$$(24) \quad E[m_{u_0}] = b',$$

$$(25) \quad E[m_{u_0}^2] = \frac{(a')^2}{2} + (b')^2,$$

$$(26) \quad \text{Var}[m_{u_0}] = E[m_{u_0}^2] - E^2[m_{u_0}] = \frac{(a')^2}{2}.$$

Rozważmy następnie funkcję próbek $q[n]$ szumu $q(t)$, tj.:

$$(27) \quad m_q = \frac{q[0] + q[1] + \dots + q[M-1]}{M} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} q[n].$$

Próbki $q[n]$, a także średnia (27) to zmienne losowe. Momenty zmiennej (27) wyznaczmy ze wzorów [5, 6]:

$$(28) \quad E[m_q] = 0,$$

$$(29) \quad E[m_q^2] = \frac{\sigma_q^2}{M},$$

$$(30) \quad \text{Var}[m_q] = E[m_q^2] - E^2[m_q] = \frac{\sigma_q^2}{M}.$$

Zmienną losową jest również średnia (8). Łącząc (24)-(26) z (28)-(30) otrzymujemy momenty tej zmiennej:

$$(31) \quad E[m_{u_q}] = E[m_{u_0}] + E[m_q] = E[m_{u_0}] = b',$$

$$(32) \quad E[m_{u_q}^2] = E[m_{u_0}^2] + 2E[m_{u_0}m_q] + E[m_q^2] \\ = E[m_{u_0}^2] + E[m_q^2] = \frac{(a')^2}{2} + (b')^2 + \frac{\sigma_q^2}{M},$$

$$(33) \quad \text{Var}[m_{u_q}] = E[m_{u_q}^2] - E^2[m_{u_q}] = \frac{(a')^2}{2} + \frac{\sigma_q^2}{M}.$$

Na podstawie (3) i (31) można wyznaczyć obciążenie:

$$(34) \quad b[m_{u_q}] = E[m_{u_q}] - m_u = b',$$

a na podstawie (33) i (34) błąd średniokwadratowy:

$$(35) \quad \text{MSE}[m_{u_q}] = \text{Var}[m_{u_q}] + b^2[m_{u_q}] = \frac{(a')^2}{2} + (b')^2 + \frac{\sigma_q^2}{M}$$

estymatora (8).

Wzory (33)-(35) obowiązują w losowych warunkach wyzwalania pomiaru. Są to warunki, w których w każdym powtórzeniu pomiaru faza φ jest inna (losowa). Należy zwrócić uwagę, że estymator (8) jest obciążony, a jego

wariancja zależy nie tylko od szumu $q(t)$, ale również od parametrów napięcia $u(t)$ i warunków jego akwizycji. Zmniejszenie wariancji (33) możliwe jest poprzez zapewnienie koherentnych warunków próbkowania. Wówczas $\sin(M\omega_0/2) = 0$. Oznacza to, że $a' = 0$ oraz:

$$(36) \quad \text{Var}[m_{u_q}] = \frac{\sigma_q^2}{M},$$

a także:

$$(37) \quad \text{MSE}[m_{u_q}] = (b')^2 + \frac{\sigma_q^2}{M}.$$

Dalsze zmniejszenie błędów (36) i (37) możliwe jest poprzez zwiększenie M i/lub zastosowanie filtracji cyfrowej w celu wyeliminowania U_0 i/lub szumu $q(t)$.

Badania symulacyjne i eksperymentalne

Przeprowadzono badania symulacyjne i eksperymentalne polegające na estymacji wartości średniej (3) i wyznaczeniu błędów estymacji metodą klasyczną oraz metodą Bienaymé. Wyniki błędów porównano z otrzymanymi na podstawie nierówności informacyjnej Craméra-Rao oraz opracowanych wzorów. Badania przeprowadzono w losowych warunkach wyzwalania pomiaru. W tych warunkach pomiaru faza ma rozkład równomierny, tj. $\varphi \sim U[0; 2\pi]$.

Metoda klasyczna polega na estymacji (3) z zastosowaniem (8), a następnie oszacowaniu błędów na podstawie K wyników estymacji i wzorów:

$$(38) \quad b[m_{u_q}] \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K m_{u_q}^{(k)} - m_x = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K m_{u_q}^{(k)},$$

$$(39) \quad \text{Var}[m_{u_q}] \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(m_{u_q}^{(k)} - \frac{1}{K} \sum_{m=1}^K m_{u_q}^{(m)} \right)^2,$$

$$(40) \quad \text{MSE}[m_{u_q}] \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(m_{u_q}^{(k)} \right)^2.$$

Metoda Bienaymé umożliwia obliczenie wariancji estymatora wartości średniej z próby losowej. Stosuje się ją m.in. podczas badania własności parametrów sygnałów przetwarzanych w torze pomiarowym z przetwornikiem analogowo-cyfrowym [6, 7]. Ponieważ $b[m_{u_q}] = b'$ oraz:

$$(41) \quad E[u_q[n]] = b,$$

$$(42) \quad E[u_q^2[n]] = \frac{a^2}{2} + b^2 + \sigma_q^2,$$

to korzystając z metody Bienaymé i powyższych wzorów możemy obliczyć przybliżoną wariancję:

$$(43) \quad \text{Var}[m_{u_q}] \approx \frac{1}{M} \left(E[u_q^2[n]] - E^2[u_q[n]] \right) = \frac{M}{2} \frac{\sin^2(\omega_0/2)}{\sin^2(M\omega_0/2)} (a')^2 + \frac{\sigma_q^2}{M},$$

a na podstawie (43) i obciążenia $b[m_{u_q}]$ przybliżony błąd średniokwadratowy:

$$(44) \quad \text{MSE}[m_{u_q}] \approx \frac{M}{2} \frac{\sin^2(\omega_0/2)}{\sin^2(M\omega_0/2)} (a')^2 + (b')^2 + \frac{\sigma_q^2}{M}$$

estymatora (8).

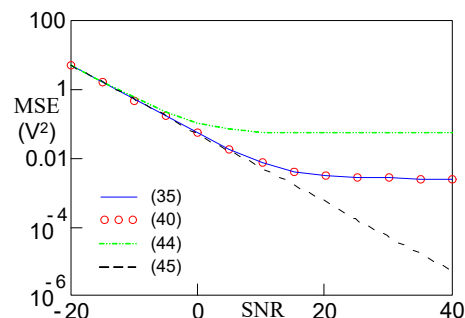
Korzystając z nierówności informacyjnej Craméra-Rao można ustalić najmniejszy MSE nieobciążonego estymatora danego parametru. Jeżeli założymy, że jest to estymator wartości średniej oraz, że jest on nieobciążony, to jego najmniejszy MSE jest równy CRLB (Cramér-Rao lower bound), gdzie:

$$(45) \quad \text{CRLB} = \frac{\sigma_q^2}{M}.$$

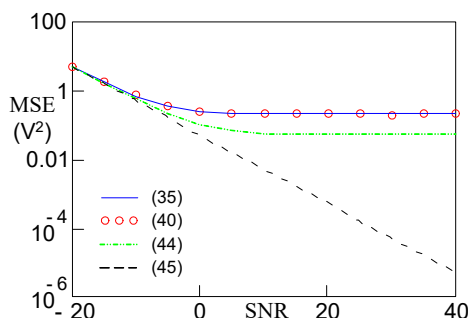
Łatwo zauważyć, że po wyeliminowaniu U_0 i zapewnieniu koherentnych warunków próbkowania napięcia $u_q(t)$, otrzymamy najmniejszy MSE estymatora (8).

Wyniki symulacji

W pierwszej kolejności przeprowadzono badanie polegające na sprawdzeniu oddziaływania szumu Gaussa na wyniki estymacji wartości średniej. Podczas symulacji zapewniono koherentne (rys. 1) i niekoherentne (rys. 2) warunki próbkowania. Zaobserwowano, że w obu sytuacjach pomiarowych błędy (35) i (40) są zbliżone. W warunkach próbkowania koherentnego (rys. 1) i rosnącego SNR oba błędy zbiegały do U_0^2 . Wyniki MSE były również bliżej CRLB. Błędy dla metody Bienaymé były natomiast zbliżone do pozostałych błędów tylko, gdy szum dominował w mierzonym napięciu (SNR < 0).



Rys. 1. MSE w funkcji SNR: $U_m = 1$ V, $U_0 = 0,05$ V, $\omega_0 = 0,2\pi$, $\varphi \sim U[0; 2\pi]$, $M = 10$, $K = 1000$

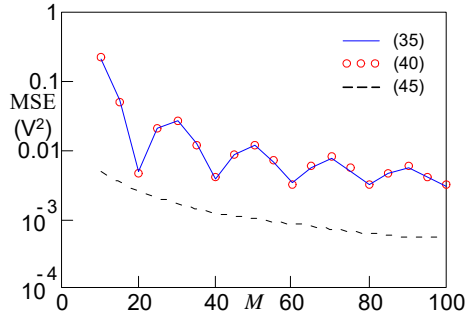


Rys. 2. MSE w funkcji SNR: $U_m = 1$ V, $U_0 = 0,05$ V, $\omega_0 = 0,1\pi$, $\varphi \sim U[0; 2\pi]$, $M = 10$, $K = 1000$

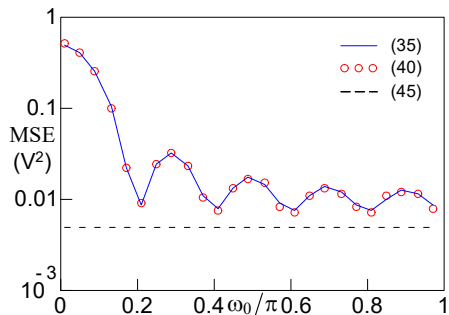
W kolejnym kroku sprawdzono oddziaływanie M na wyniki estymacji wartości średniej (rys. 3). Podobnie jak podczas poprzedniego badania, błędy (35) i (40) były zbliżone i wraz ze wzrostem M zbiegały oscylacyjnie do U_0^2 . Przeprowadzone badania pokazały, że najmniejsze MSE otrzymujemy w koherentnych warunkach próbkowania, tj. gdy $M = 2\pi l/\omega_0$, gdzie $l = 1, 2, \dots$. Gdy próbkowanie nie jest koherentne, to najmniejszy MSE otrzymujemy, gdy $M = \text{floor}(2\pi l/\omega_0)$ lub $M = \text{ceil}(2\pi l/\omega_0)$. Bez względu na warunki próbkowania, MSE jest nie większy niż:

$$(46) \text{MSE}[m_{u_q}] \leq \frac{1}{2 \sin^2(M \omega_0/2)} (a')^2 + (b')^2 + \frac{\sigma_q^2}{M}$$

Następne badanie polegało na wyznaczaniu MSE, gdy zmienia się wartość ω_0/π (rys. 4). Najmniejsze MSE (najbliższe CRLB) otrzymano, gdy $\omega_0 = 2\pi/M$ (próbkowanie koherentne). Należy zwrócić uwagę, że próbkując napięcie $u_q(t)$ z częstotliwością $\omega/\pi \leq f_s \leq 2\omega/\pi$ ($0,5 \leq \omega/\pi \leq 1$) otrzymujemy MSE znacząco mniejsze niż, gdy $f_s \gg 2\omega/\pi$ ($\omega/\pi \ll 0,5$).



Rys. 3. MSE w funkcji M : $U_m = 1$ V, $U_0 = 0,05$ V, $\omega_0 = 0,1\pi$, $\varphi \sim U[0; 2\pi]$, SNR = 10 dB, $K = 1000$



Rys. 4. MSE w funkcji ω_0 : $U_m = 1$ V, $U_0 = 0,05$ V, $\varphi \sim U[0; 2\pi]$, $M = 10$, SNR = 10 dB, $K = 1000$

Wyniki eksperymentu

W systemie pomiarowym składającym się z generatora funkcji Agilent 33220A, komputera klasy PC z zainstalowaną kartą akwizycji danych PCI-6024E firmy National Instruments i częstotliwościomierza referencyjnego TTI TF 930, wykonano pomiary napięcia elektrycznego zmiennego o wartości skutecznej $V_{\text{RMS}} = 3$ V i częstotliwości $f = 50$ Hz.

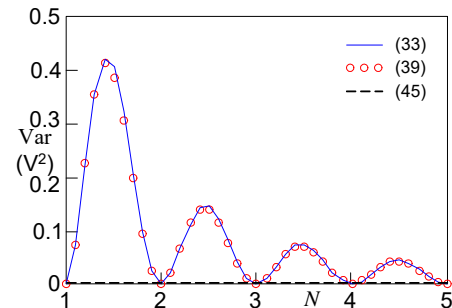
W wyniku przeprowadzonych pomiarów otrzymano $K = 100$ serii pomiarowych. Każda seria zawierała $M = 5000$ próbek napięcia i miała inną (losową) fazę początkową φ . Częstotliwość próbkowania była równa $f_s = 50$ kHz. Zmierzona częstotliwość referencyjna wyniosła $f_{\text{ref}} = 49,9984$ Hz (czas pomiaru częstotliwości wynosił 100 sekund). Dla każdej serii wyznaczono SNR, przy czym $\text{SNR} \in [67,7 \text{ dB}; 68,6 \text{ dB}]$. Następnie obliczono:

$$(47) \quad \omega_0 = 2\pi \frac{f}{f_s}, \quad \sigma_q = \frac{V_{\text{RMS}}}{\sqrt{10^{-\frac{\text{SNR}_{\text{min}}}{10}}}}$$

gdzie $\text{SNR}_{\text{min}} = 67,7$ dB.

Na podstawie obliczonych ω_0 i σ_q oraz zadanego M sporządzono charakterystyki wariancji (33) i (39) oraz CRLB (45) w funkcji liczby okresów $N = M\omega_0^{\text{ref}} / (2\pi)$ napięcia, gdzie $\omega_0^{\text{ref}} = 2\pi f_{\text{ref}} / f_s$ (rys. 5). Zmianę N uzyskano skracając szerokość okna pomiarowego (zmniejszając M z krokiem

równym 100 próbek) dla każdej serii pomiarowej. Wyniki badań pokazały zgodność wariancji (33) i (39). Obie wariancje malały oscylacyjnie wraz ze wzrostem N . Należy zwrócić uwagę, że szum występujący w mierzonym napięciu okazał się bardzo mały ($\text{SNR} \gg 0$). Pomimo to wariancje osiągnęły znaczne wartości dla niecałkowitych N i były wielokrotnie większe od $\text{CRLB} \in (3 \cdot 10^{-10} \text{ V}^2; 2 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2)$. Najmniejsze wariancje (najbliższe CRLB) zaobserwowano, gdy N była liczbą całkowitą (próbkowanie koherentne).



Rys. 5. Wariancja w funkcji N : $V_{\text{RMS}} = 3$ V, $f = 50$ Hz, $\varphi \sim U[0; 2\pi]$, $f_{\text{ref}} = 49,9984$ Hz, $f_s = 50$ kHz, $M = 5000$, $\text{SNR}_{\text{min}} = 67,7$ dB, $K = 100$

Podsumowanie

W artykule oceniono dokładność wyników estymacji wartości średniej napięcia sinusoidalnego. Zaproponowano nowe narzędzia matematyczne umożliwiające wyznaczanie błędów estymatora wartości średniej. Dzięki opracowanym narzędziom zidentyfikowano i opisano składowe błędów, które nie wynikały z szumu i/lub składowej stałej i których nie można było wyznaczyć metodą klasyczną i metodą Bienaimé. Działanie narzędzi zweryfikowano za pomocą symulacji i badań eksperymentalnych. Uzyskano dużą zgodność wyników błędów. Przeprowadzone badania pokazały, że najmniejsze błędy otrzymujemy w koherentnych warunkach próbkowania. Jeżeli próbkowanie nie jest koherentne, to błędy mogą być znaczące, nawet jeśli szum i/lub składowa stała występujące w mierzonym napięciu są pomijalnie małe.

Autorzy: dr hab. inż. Sergiusz Sienkowski, prof. UZ, Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii, Elektroniki i Informatyki, ul. Z. Szafrana 2, 65-516 Zielona Góra, E-mail: S.Sienkowski@imei.uz.zgora.pl; dr inż. Mariusz Krajewski, Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii, Elektroniki i Informatyki, ul. Z. Szafrana 2, 65-516 Zielona Góra, E-mail: M.Krajewski@imei.uz.zgora.pl.

LITERATURA

- [1] Bendat J.S., Piersol A.G., Random Data: Analysis and Measurement Procedures, John Wiley & Sons, 2010
- [2] Loève M., Probability Theory I, Springer, 1977
- [3] Kay S.M., Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory, NJ: Prentice-Hall, 1993
- [4] Sienkowski S., Krajewski M., O estymacji wartości całokresowej sygnału jedno-tonowego, XIV Konferencja Naukowa SP'2022, Oficyna Wydaw. Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra, (2022), 89-92
- [5] Sienkowski S., Krajewski M., On the statistical analysis of the harmonic signal autocorrelation function, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 31 (4), (2021), 549-611
- [6] Lal-Jadziak J., Sienkowski S., Variance of random signal mean square value digital estimator, Metr. Meas. Sys., 16 (2), 2009, 267-277
- [7] Kollar I., Bias of mean value and mean square value measurements based on quantized data, IEEE Trans. Instrum. Meas., 43 (5) (1994), 733-739