

## Realizacja dolnoprzepustowych filtrów parametrycznych

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono realizację dolnoprzepustowych filtrów o parametrach zmiennych w czasie. Strukturę filtru pierwszego rzędu zbudowano na bazie układu mnożącego. Filtr drugiego rzędu opracowano na bazie sekcji bikwadratowych. Przyjęto eksponencjalnie zmienny w czasie przebieg zmian parametrów filtrów. Uzyskane wyniki zilustrowano przykładami.

**Abstract.** The article presents practical realization of low pass time-varying filters. The structure of first order filter is created based on multiplier. The second order filter is build based on biquadrate structure. The exponential waveform of variable coefficients is assumed. The obtained results are verified by examples. (**Realization of low pass parametric filters**).

**Słowa kluczowe:** LTV, filtr parametryczny, układ niestacjonarny, filtr o zmiennych w czasie parametrach

**Keywords:** LTV, parametric filter, non-stationary system, time-varying filter

### Wstęp

Linowe układy o zmiennych w czasie parametrach są niestacjonarnymi układami deterministycznymi, których parametry zależą od czasu. Układy te są nazywane parametrycznymi lub krócej - LTV (z ang. *linear time varying*). Analizie układów LTV, traktowanych jako bezpośrednie uogólnienie klasycznych, stacjonarnych układów LTI (*linear time invariant*), opisanych równaniami różniczkowymi o zmiennych w czasie współczynnikach, zostało poświęcone wiele prac teoretycznych, m.in. [1], [2], [3], [4], [5]. Znane są także praktyczne zastosowania systemów LTV: są one stosowane w przetwarzaniu sygnału, [8], ich właściwości dobrze sprawdzają się do szybkiej filtracji sygnałów [7] i redukcji szumów [8], [9], [10], [11], [12], stanowią też elementy układów kompensujących w sieciach energetycznych [13], wzmacniaczy [4], generatorów chaotycznych [14], dział elektromagnetycznych [15] oraz urządzeń medycznych [16]. Główną zaletą stosowania układów parametrycznych jest możliwość poprawy właściwości dynamicznych systemów i skrócenia czasu trwania stanów przejściowych [12], [13], [17].

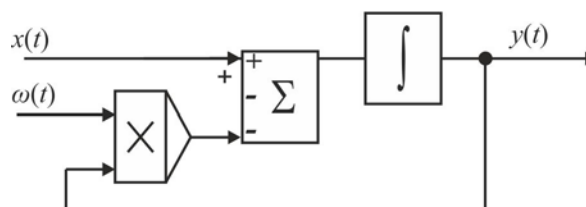
W literaturze [4], [5], [18], [19], [20], [21], można znaleźć metody analizy układów LTV bazujące na transformacji parametrycznych równań różniczkowych do równań znanych z matematyki stosowanej np. równań Riccatiego [18], Floquet'a, Mathieu, Meissner'a czy Hill'a [4]. Wspomniane metody wymagają wyznaczenia macierzy stanu o elementach zmiennych w czasie, następnie obliczania uogólnionych wartości własnych i tworzenia macierzy rozwiązań fundamentalnych tzw. macierzy Wrońskiego [19]. Takie podejście jest bardzo użyteczne z punktu widzenia badania stabilności układów lub badania ich właściwości częstotliwościowych [19], [20], ale z reguły nie prowadzi do uzyskania zamkniętej formy analitycznych rozwiązań stanowiących odpowiedzi układów na dowolne wymuszenie. Analityczne rozwiązania dla wyżej wspomnianych parametrycznych równań różniczkowych istnieją tylko w nielicznych przypadkach [3], [22], które w dużej mierze zależą od charakteru zmienności funkcji parametryzujących, czyli w praktyce od przebiegu zmienności parametrów układu.

Z teorii równań różniczkowych wynika, że istnieją rozwiązania fundamentalne dla układów pierwszego rzędu i niektórych przypadków układów drugiego rzędu [3], [4]. Bazując na znajomości macierzy rozwiązań fundamentalnych (Wrońskiego) [4], [18], [19], można wyznaczyć rozwiązania równań różniczkowych opisujących układy LTV. Rozwiązania dla układów pierwszego rzędu mają postać funkcji eksponencjalnych, z całą funkcji parametryzującej w wykładniku [3], [23]. Rozwiązania

fundamentalne dla układów LTV drugiego rzędu są znacznie bardziej skomplikowane i są wyrażone za pomocą pomocy specjalnych funkcji fizyki matematycznej tj. funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju niecałkowitych rzędów lub konfluentne funkcje hipergeometryczne [17], [22]. Wyznaczenie zamkniętej formy rozwiązań dla układów LTV pierwszego i drugiego rzędu jest możliwe, tylko jeśli istnieje cała kombinacja funkcji parametryzującej i rozwiązań fundamentalnych. Szczegóły tej analizy zawarto we wcześniejszych pracach autorki [17], [23]. Niniejszy artykuł jest poświęcony propozycji analogowej realizacji parametrycznego dolnoprzepustowego filtru pierwszego i drugiego rzędu ze zmiennymi parametrami.

### Model filtru parametrycznego drugiego rzędu

Procesy w układach niestacjonarnych opisuje się za pomocą parametrycznych równań różniczkowych, których współczynniki są zależne od czasu.



Rys. 1. Model dolnoprzepustowego filtru parametrycznego I-go rzędu

Model filtru LTV pierwszego rzędu przedstawiono na rysunku 1. W dziedzinie czasu jest on opisany parametrycznym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu (1):

$$(1) \quad \frac{dy(t)}{dt} + \omega(t)y(t) = kx(t),$$

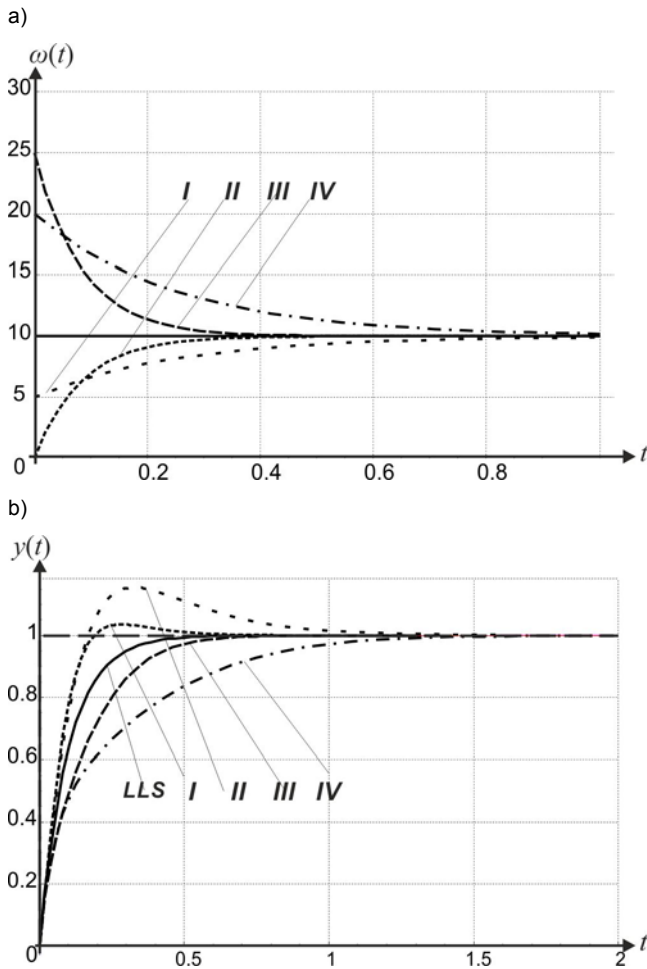
gdzie:  $x(t)$  – sygnał wejściowy,  $y(t)$  – sygnał wyjściowy,  $k$  – współczynnik wzmocnienia dla składowej stałej,  $\omega(t)$  – funkcja parametryzująca.

Występująca we wzorze (1) funkcja  $\omega(t)$  może być interpretowana jako zmienna czasie pulsacja graniczna. W artykule założono jej eksponencjalny przebieg postaci:

$$(2) \quad \omega(t) = \omega_g + Ce^{-\gamma t}.$$

Współczynnik  $C$  występujący we wzorze (2) określa wartość funkcji parametryzującej dla chwili  $t=0$ , natomiast

współczynnik  $\gamma$  określa szybkość osiągnięcia wartości ustalonej  $\omega_g$ . Współczynnik  $\omega_g$ , odpowiada pulsacji granicznej klasycznego filtra LTI, do którego ewaluuje struktura rozpatrywanego filtra LTV po dostatecznie długim czasie.



Rys. 2. Wyniki symulacji idealnego dolnoprzepustowego LTV I-go rzędu, a) przebieg funkcji parametryzującej  $\omega(t)$ , b) odpowiedzi na wymuszenie skokowe

W przypadku układów LTV I-go rzędu istnieje możliwość analitycznego wyznaczenia odpowiedzi na dowolne wymuszenie  $x(t)$  w postaci sygnału o skończonej mocy średniej, która przy eksponencjalnie zmiennej funkcji parametryzującej wyraża się wzorem [22], [23]:

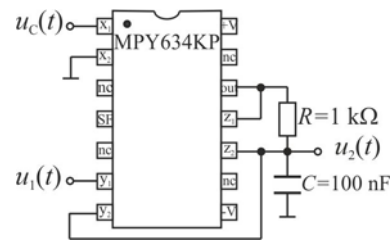
$$(3) \quad y(t) = \int_0^t e^{\gamma\tau} \exp(-\gamma t) e^{-\omega_g(t-\tau)} \sum_{k=0}^N (-1)^k \left(\frac{C}{\gamma}\right)^k \frac{e^{-\gamma k \tau}}{k!} x(\tau) d\tau.$$

Rozwiązanie równania (3) wyraża w sposób jawny odpowiedź filtra na wymuszenie  $x(t)$ . W celu zweryfikowania analitycznego rozwiązania odpowiedzi analizowanego układu przeprowadzono symulację idealnej sekcji LTV w programie PSpice. Symulacja została przeprowadzona dla układu LTV którego parametry zmieniają się jak w przypadkach I, II, III, IV, V (rys. 2a). Odpowiedź skokową wyznaczono dla dolnoprzepustowego filtra, przy pulsacji ustalonej  $\omega_g=10$  rad/s. Wyniki analizy przedstawione zostały na rysunku 2b.

Zmiana parametru wpływa na kształt i parametry (wartość maksymalną, szybkość osiągnięcia stanu ustalonego) odpowiedzi skokowej układu. Gdy zmienny w czasie współczynnik osiągnie swoją wartość ustaloną, układ LTV staje się równoważny stacjonarnemu układowi LTI.

### Realizacja filtra parametrycznego I-go rzędu

Dolnoprzepustowy filtr parametryczny pierwszego rzędu został zbudowany na bazie układu mnożącego MPY634 w konfiguracji przedstawionej na rysunku 3.



Rys. 3. Struktura dolnoprzepustowego filtra LTV I-go rzędu

Dla stałego napięcia sterującego ( $u_c(t) = U_C = \text{const}$ ) układ przedstawiony na rysunku 3 opisany jest transmitancją:

$$(4) \quad H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{s + \frac{1}{RC} \frac{U_C}{SF}} = \frac{k}{s + \omega_0},$$

i jest znaną realizacją dolnoprzepustowego filtra o częstotliwości granicznej regulowanej za pomocą napięcia sterującego  $U_C$ . Transmitancji (4) odpowiada równanie różniczkowe:

$$(5) \quad \frac{du_2(t)}{dt} + \frac{1}{CR} \frac{U_C}{SF} u_2(t) = k u_1(t).$$

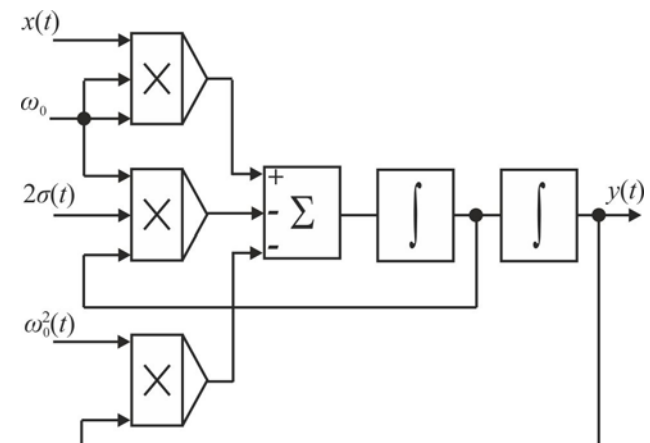
Uzmienniając parametr  $u_c(t)$  uzmienniony zostaje współczynnik równania, który może być interpretowany jako zmienna w czasie pulsacja graniczna (por wzór (1)):

$$(6) \quad \frac{du_2(t)}{dt} + \frac{1}{CR} \frac{u_c(t)}{SF} u_2(t) = k u_1(t),$$

zatem wzór (6) staje się równaniem parametrycznym opisującym dolnoprzepustowy filtr parametryczny rzędu pierwszego.

### Model filtra parametrycznego drugiego rzędu

Model filtra LTV drugiego rzędu w dziedzinie czasu opisany jest parametrycznym równaniem różniczkowym drugiego rzędu (7), a jego schemat ideowy przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Model dolnoprzepustowego filtra parametrycznego II-go rzędu

Parametryczne równanie różniczkowe dla układu II-go rzędu ma postać:

$$(7) \quad y''(t) + 2\sigma(t)\omega_r y'(t) + \omega^2 y(t) = kx(t),$$

gdzie:  $\omega_r$  – pulsacja rezonansowa prototypu stacjonarnego,  $k$  – współczynnik wzmocnienia dla składowej stałej,  $\omega^2(t)$ ,  $\sigma(t)$  – funkcje parametryzujące.

Rozwiązania analityczne takich równań nie zawsze są znane, dlatego też wnikliwa analiza układów LTV jest możliwa tylko dla szczególnych funkcji przebiegu zmienności parametrów (funkcji parametryzujących). W artykule przyjęto równanie sekcji LTV drugiego rzędu z parametrami zmiennymi eksponencjalnie zgodnie ze wzorami (8) i (9) przy czym szybkość osiągania wartości ustalonej przez obie funkcje jest taka sama i określona przez współczynnik  $\gamma$ .

$$(8) \quad \omega^2(t) = \omega_r^2 + C e^{-\gamma t}, \quad \omega_r, \gamma \in R^+, C \in R,$$

$$(9) \quad \sigma(t) = \sigma_0 + D e^{-\gamma t}, \quad \sigma_0, \gamma \in R^+, D \in R,$$

gdzie:  $\sigma_0$  – współczynnik tłumienia prototypu stacjonarnego.

Przy tak przyjętych założeniach układ LTV opisany równaniem (7) dla  $t \rightarrow \infty$  przekształca się w układ stacjonarny o parametrach  $\omega_r$ ,  $\sigma_0$ , a jego szczegółowa analiza zawarta jest we wcześniejszych pracach autorki np. [17], z której wynika że odpowiedź układu na dowolne wymuszenie można zapisać jako:

$$(10) \quad y(t) = A \left[ q_2(t) \int_0^t q_1(\tau) x(\tau) e^{\frac{\omega_r}{2} \left( \sigma_0 \tau - \frac{D}{\gamma} e^{-\gamma \tau} \right)} d\tau - q_1(t) \int_0^t q_2(\tau) x(\tau) e^{\frac{\omega_r}{2} \left( \sigma_0 \tau - \frac{D}{\gamma} e^{-\gamma \tau} \right)} d\tau \right] e^{\frac{\omega_r}{2} \left( \frac{D}{\gamma} e^{-\gamma t} - \sigma_0 t \right)},$$

przy czym:

$$(11) \quad q_1(t) = \zeta(t) \cdot {}_1F_1 \left( \alpha, \beta; \frac{\omega_r D}{\gamma} e^{-\gamma t} \right),$$

$$(12) \quad q_2(t) = \zeta(t) \cdot {}_1F_1 \left( \alpha - \beta + 1, 2 - \beta; \frac{\omega_r D}{\gamma} e^{-\gamma t} \right),$$

gdzie:

$$(13) \quad \zeta(t) = e^{-\frac{\omega_r D}{2\gamma} e^{-\gamma t}} \left[ e^{-\gamma t} \right]^{\frac{-\omega_r \sqrt{\sigma_0^2 - 4}}{2\gamma}},$$

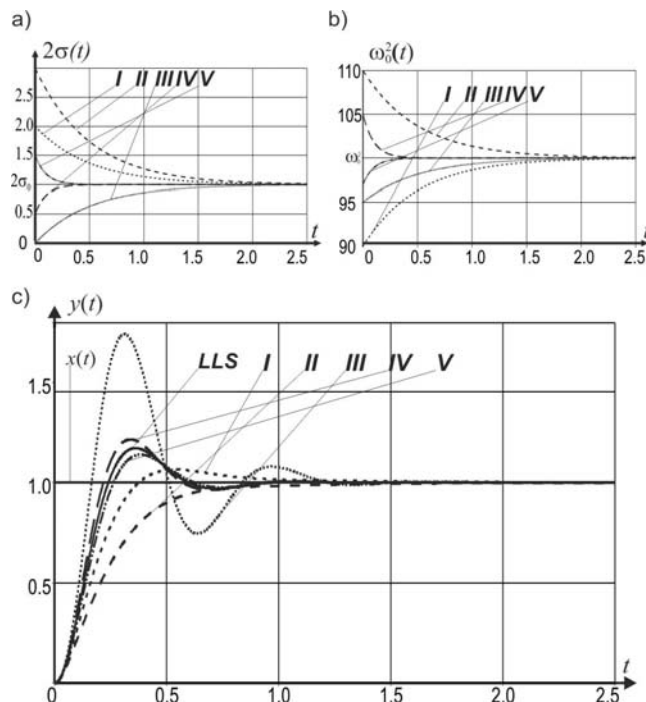
$A$  – stała będąca odwrotnością wyznacznika macierzy Wrońskiego (macierzy rozwiązań fundamentalnych  $q_1(t)$  oraz  $q_2(t)$ ) [23],

${}_1F_1(\alpha, \beta; z)$  – konfluentna funkcja hipergeometryczna [22], której parametry zależą od współczynników funkcji parametryzujących:

$$(14) \quad \alpha = \frac{1}{4\gamma} \left[ 2C + \beta(D\omega_r - 2) - \omega_r \left( 4\sqrt{\sigma_0^2 - 4} + D\sigma_0\omega_r \right) \right]$$

$$(15) \quad \beta = 1 + \frac{\omega_r \sqrt{\sigma_0^2 - 4}}{2\gamma}.$$

Rozwiązanie równania (10) wyraża w sposób jawny odpowiedź filtru na wymuszenie  $x(t)$  w postaci sygnału o skończonej mocy średniej. W celu zweryfikowania analitycznego rozwiązania odpowiedzi sekcji parametrycznej przeprowadzono symulację idealnej sekcji LTV w programie PSpice. Symulacja została przeprowadzona dla sekcji, której parametry zmieniają się jak w przypadkach I, II, III, IV, V. Odpowiedź skokową wyznaczono dla sekcji dolnoprzepustowej, przy pulsacji ustalonej  $\omega_r = 10$  rad/s oraz tłumieniu ustalonym  $\sigma_0 = 0,5$ . Wyniki analizy przedstawione zostały na rysunku 5.



Rys. 5. Wyniki symulacji idealnego dolnoprzepustowego LTV II-go rzędu a) przebieg funkcji parametryzującej  $\sigma(t)$ , b) przebieg funkcji parametryzującej  $\omega^2(t)$ , c) odpowiedzi na wymuszenie skokowe

Zmieniając charakter przebiegu parametrów filtru zmienia się jego dynamika. W stanie ustalonym filtr LTV jest równoważny filtrowi LTI.

#### Realizacja filtru parametrycznego II-go rzędu

Dolnoprzepustowy filtr parametryczny drugiego rzędu zrealizowany został na bazie struktury bikwadratowej [24] (rys. 6). Układ ten dla stałych parametrów opisany jest transmitancją:

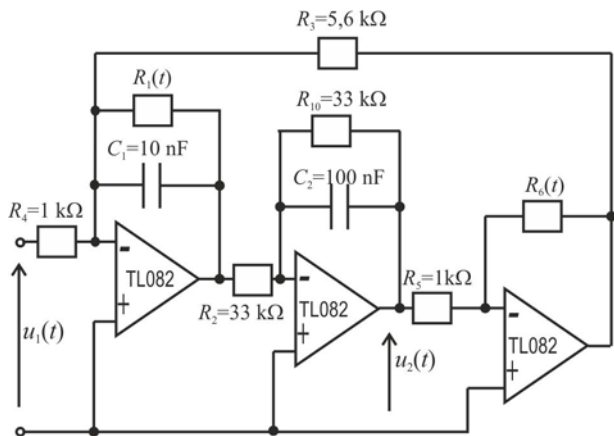
$$(16) \quad H_{LP}(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} s + \frac{R_6}{R_2 R_3 R_5 C_1 C_2}},$$

której odpowiada równanie różniczkowe:

$$(17) \quad \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + \frac{du_2(t)}{R_1 C_1 dt} + \frac{R_6 u_2(t)}{R_2 R_3 R_5 C_1 C_2} = \frac{u_1(t)}{R_2 R_4 C_1 C_2}.$$

Można zauważyć, że uzmienniając parametry  $G_1 = 1/R_1$  oraz  $R_6$  uzmiennione zostają współczynniki równania występujące przy funkcji  $u_2(t)$ , i  $u_2(t)$ , czyli są to parametry odpowiadające za zmianę  $\sigma(t)$  oraz  $\omega^2(t)$ . Wzór (17) staje się zatem równaniem parametrycznym drugiego rzędu (por. z (7)) rozpatrywanym w artykule:

$$(18) \frac{d^2 u_2(t)}{dt} + \frac{G_1(t) du_2(t)}{C_1 dt} + \frac{R_6(t) u_2(t)}{R_2 R_3 R_5 C_1 C_2} = \frac{u_1(t)}{R_2 R_4 C_1 C_2}.$$



Rys. 6. Struktura dolnoprzepustowego filtra LTV II-go rzędu

Można przyjąć, że zmienne w czasie rezystancje (przewodności) proporcjonalnie odzwierciedlają przebieg zmian funkcji parametryzujących:

$$(19) R_6(t) \approx \omega_0^2(t),$$

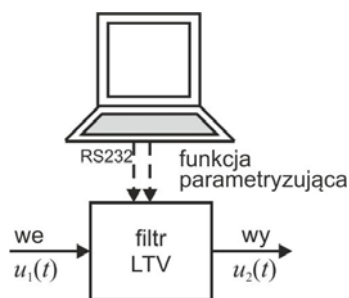
$$(20) G_1(t) \approx \sigma(t).$$

Zmienne w czasie rezystancje (przewodności) reprezentujące funkcje parametryzujące zostały zrealizowane przy użyciu potencjometrów cyfrowych, których rezystancja sterowana jest za pomocą zewnętrznego wygenerowanego eksponencjalnego napięciowego sygnału sterującego.

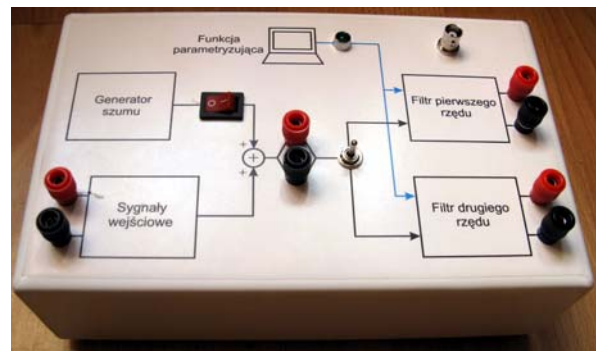
### Wyniki badań laboratoryjnych

Układ do badania funkcji filtrów parametrycznych przedstawiono na rysunku 7. Funkcje parametryzujące są eksponencjalnym sygnałem napięciowym generowanym za pomocą dedykowanego oprogramowania (rys. 8) oraz mikroprocesora ATmega8 i jednocześnie są odpowiednio napięciem przestrajającym częstotliwość graniczną układu (rys. 3) oraz napięciami sterującymi zmianą rezystancji w układzie z rysunku 6. W celu sprawdzenia wpływu zmiany funkcji parametryzujących na pracę układów wykorzystano dodatkowy sygnał generowany przez procesor o okresie równym czasowi generacji tej funkcji. Dla układu pierwszego rzędu, przy częstotliwości procesora równej 8 MHz i częstotliwości 200 kHz magistrali I<sup>2</sup>C, czas generacji funkcji przez procesor jest równy 23 ms, dla układu drugiego rzędu – 46 ms. Sygnał ten wykorzystano jako trigger oscyloskopu. Analiza układów I i II rzędu polegała na badaniu odpowiedzi filtra na wymuszenie sinusoidalne.

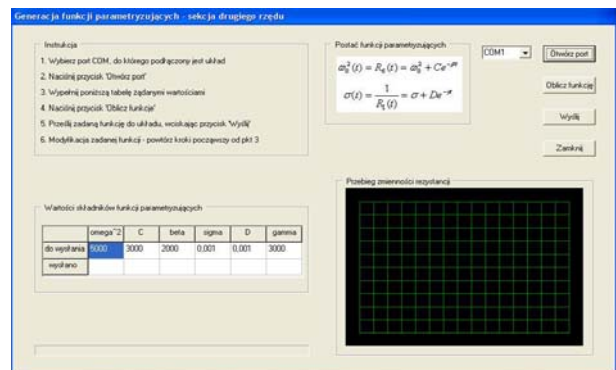
a)



b)

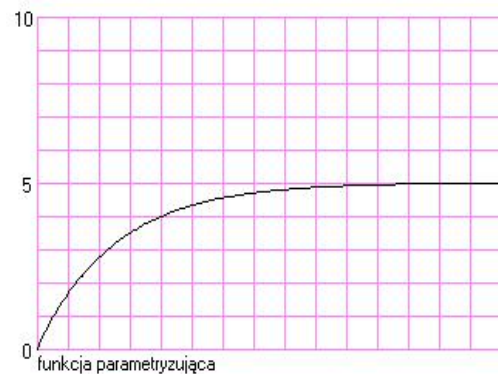


Rys. 7. Układ do badania filtra LTV, a) schemat ideowy układu, b) stanowisko laboratoryjne

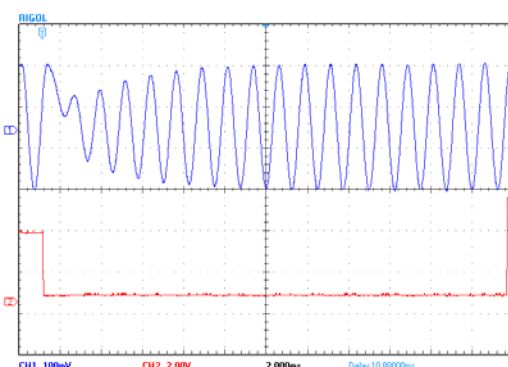


Rys. 8. Okno programu generatora funkcji parametryzujących

a)

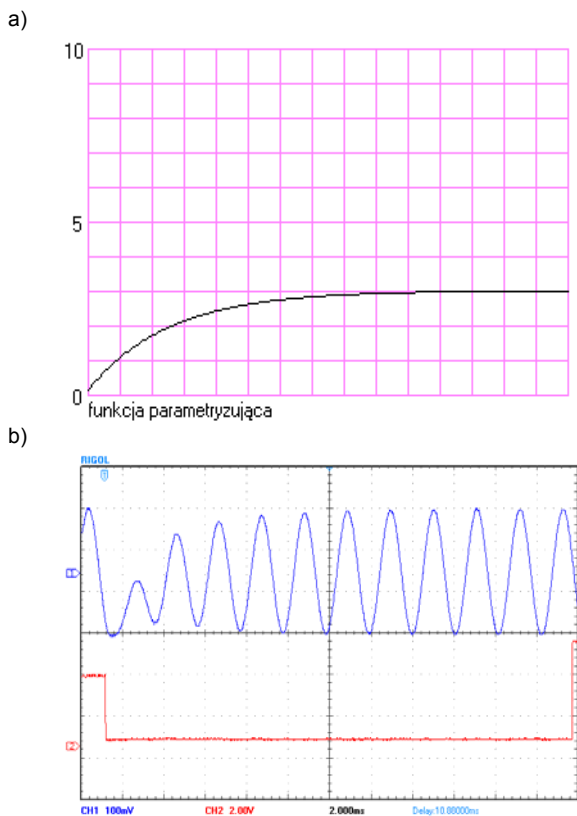


b)

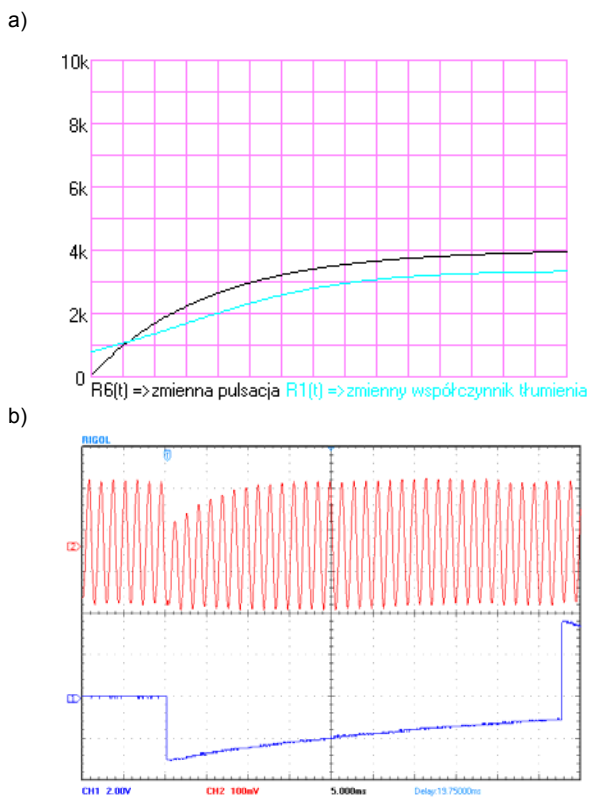


Rys. 9. Wynik badań filtra LTV I-go rzędu - przypadek A: a) przebieg funkcji parametryzującej  $\omega(t)$ , b) odpowiedź układu na wymuszenie sinusoidalne

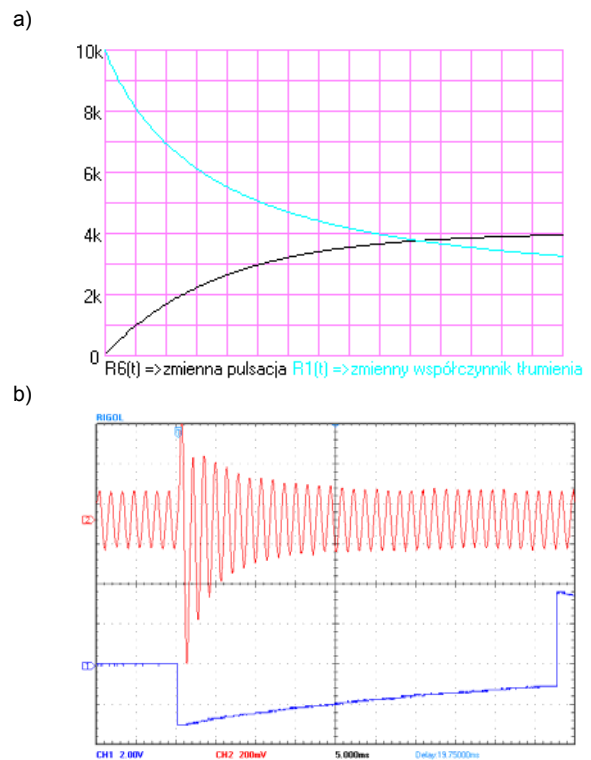




Rys. 10. Wynik badań filtra LTV I-go rzędu - przypadek **B**: a) przebieg funkcji parametryzującej  $\omega(t)$ , b) odpowiedź układu na wymuszenie sinusoidalne



Rys. 11. Wynik badań filtra LTV II-go rzędu - przypadek **A**: a) przebiegi funkcji parametryzujących  $\alpha(t)$  oraz  $\omega^2(t)$ , b) odpowiedź układu na wymuszenie sinusoidalne



Rys.12. Wynik badań filtra LTV II-go rzędu - przypadek **B**: a) przebiegi funkcji parametryzujących  $\alpha(t)$  oraz  $\omega^2(t)$ , b) odpowiedź układu na wymuszenie sinusoidalne

Wyniki pomiarów dla filtra I-go rzędu przedstawiono na rysunkach 9 i 10. Sygnał impulsowy oznaczony kolorem czerwonym stanowi sygnał wyzwalania dla oscyloskopu. Wyniki badań filtra LTV drugiego rzędu przedstawiono na rysunkach 11 i 12. Kolorem czarnym i niebieskim oznaczono przebiegi zmienności parametrów (odpowiednio  $R_6(t)$  oraz  $R_1(t)$ ), kolorem czerwonym oznaczono sygnał wyjściowy układu, kolor niebieski oznacza sygnał impulsowy wyzwalania dla oscyloskopu.

Na podstawie przebiegów przedstawionych na rysunkach 9-12 wyraźnie widać, że zmianą parametru układu można wpływać na jego dynamikę, a tym samym na skrócenie czasu trwania stanów przejściowych. Ta właściwość układu LTV została praktycznie wykorzystana w procesie identyfikacji składowej stałej sygnału mocy średniej [13] gdzie wykazano szybszą odpowiedź układu parametrycznego w porównaniu z filtrem stacjonarnym.

### Podsumowanie

Opracowane układy dolnoprzepustowych filtrów parametrycznych I-go i II-go rzędu z parametrami zmiennymi eksponencjalnie umożliwiają zbadanie dynamiki układów parametrycznych. Modele te wykorzystane zostaną do optymalizacji właściwości tych układów, między innymi z punktu widzenia ich właściwości dynamicznych w porównaniu z klasycznymi sekcjami LTI. Układy pierwszego i drugiego rzędu stanowią bazę do budowy bardziej skomplikowanych struktur LTV wyższych rzędów. Umożliwi to znalezienie optymalnych struktur i ustalenie przebiegów zmian i wartości parametrów zapewniających oczekiwane właściwości filtru (np. dynamika odpowiedzi, redukcja szumu w sygnale, itp). W stanie ustalonym układy o zmiennych parametrach są równoważne odpowiadającym im układom o stałych parametrach, a korzyścią ich stosowania może być poprawa dynamiki.

**Autorka:** dr inż. Anna Piwowar, Politechnika Śląska, Katedra Elektrotechniki i Informatyki, ul. Akademicka 10, 44-100 Gliwice, E-mail: [anna.piwowar@polsl.pl](mailto:anna.piwowar@polsl.pl)

#### LITERATURA

- [1]. Erfani S., Bayan N.: On linear time-varying system characterizations, *IEEE Int. Conf. on Electro/Information Technology* (2009), pp. 207 - 210
- [2]. Koksals M., Koksals M.E.: Commutativity of linear time-varying differential systems with nonzero initial conditions: a review and some new extensions. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2011 (2011), Article ID 678575, doi:10.1155/2011/678575
- [3]. D'Angelo H.: Linear time-varying systems. analysis and synthesis, *Allyn and Bacon, Inc.* Boston, (1970)
- [4]. Richards J. A.: Analysis of periodically time-varying systems, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, New York, (1983)
- [5]. Kaczorek T.: Positive and stable time-varying continuous-time linear systems and electrical circuit, *Poznan University of Technology Academic Journals of Electrical Engineering* (2016) no 81, pp. 11-19
- [6]. Shimaly Y.: Continuous-Time Systems, *Springer Science & Business Media* (2007)
- [7]. Cheeran N., Pandey P. C.: Optimizing the sweep cycle of time-varying comb filters for binaural dichotic presentation in sensor neural hearing impairment, *14th Int. Conf. on Digital Signal Processing* (2002) vol. 2 pp.1145 – 1148
- [8]. Zhang H., Guoan B., Zhao L., Razul S.G., See C.-M.S.: Time varying filtering and separation of nonstationary FM signals in strong noise environments. *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing* (2014) pp. 4171 - 4175
- [9]. Schnell K., Lacroix A.: Model-based analysis of speech and audio signals for real-time processing based on time-varying lattice filters, *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing* (2009) pp. 3973 – 3976
- [10]. Jaskuła M., Kaszyński R.: Using the parametric time-varying analog filter to average-evoked potential signals *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement* (2004) vol. 52, no 3, pp. 709-715
- [11]. Kaszyński R., Piskorowski J.: Bessel filters with varying parameters, *Proc of the IEEE Conf. Instrumentation and Measurement Technology* (2005) vol.1, pp.757-761
- [12]. Kaszyński R., Piskorowski J.: Selected structures of filters with time-varying parameters, *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, (2007) vol.56, no.6, pp.2338-2345
- [13]. Grabowski D., Maciążek M., Pasko M., Piwowar A.: Time-invariant and time-varying filters versus neural approach applied to DC component estimation in control algorithms of active power filters. *Applied Mathematics and Computation* (2018) vol. 319, pp. 203-217
- [14]. Ou B., Liu D.: Chaotic attractor generation via a simple linear time-varying system, *Discrete Dynamics in Nature and Society* (2010), article ID 840346, 9 pages, doi:10.1155/2010/840346
- [15]. Kluszczynski K., Domin J.: Two module electromagnetic launcher with pneumatic assist modeling, computer simulations and laboratory investigations, *COMPTEL (2015)* vol. 34 no. 3, pp. 691-709
- [16]. Jaskuła M., Averaging brainstem auditory evoked potentials with parametric filter. 2000, *Conf.: Methods and models in automation and robotics* (2000) vol. 2, pp. 961–964
- [17]. Walczak J., Romanowska A.: Analysis of second order LTV section with exponentially varying parameters, *Przełąd Elektrotechniczny* (2007) no 2, pp: 106-109
- [18]. Neerchoff F.L., van der Kloet P.: A complementary view on time - varying systems. *Proc. ISCAS*, Sydney (2001) vol. III, pp. 779-782
- [19]. Zhu J.J.: A Unified Spectral Theory for Linear Time-Varying Systems, *Progress and Challenges, Proc. of 34th Conf. on Decision and Control, New Orleans, LA* (1995), pp. 2540-2546
- [20]. Bayan N., Erfani S.: Frequency analysis of time varying systems, *IEEE Conf. of Electro/Information Technology*, Ontario (2006), pp. 33-36
- [21]. Sandberg I. W.: Realization of a class of periodically variable systems, *IRE Trans. on Circuit Theory* (1962) vol.9, no.4, pp. 416- 417
- [22]. Polyanin A. D., Zaitsev, V. F.: Handbook of exact solutions for ordinary differential equations, *2nd Edition, Chapman & Hall/CRC*, (2003) Boca Raton
- [23]. Piwowar A., Walczak J.: Impulse responses of generalized first order LTV sections, *Lect. Notes Electrical Eng. Book Title: Analysis and Simulation of Electrical and Computer Systems*, Springer, (2014) vol. 324, chapter 6, pp. 73-79
- [24]. Chen W. K.: The circuits and filters handbook, *IEEE Press*, New York (1995).