

doi:10.15199/48.2021.01.37

## Analiza porównawcza obliczeniowej identyfikacji natężenia pola elektrycznego z zastosowaniem różnicy centralnej drugiego oraz czwartego rzędu

**Streszczenie.** Do obliczeniowej identyfikacji natężenia składowej elektrycznej pola elektromagnetycznego stosuje się metody, w których opis różniczkowy opisujący w sposób ciągły przestrzenny rozkład potencjału jest zamieniony na dyskretny opis różnicowy. W zależności od złożoności centralnej różnicy poszukiwanej funkcji w metodzie różnicowej wartość każdego punktu siatki standardowo można wyznaczyć przy zastosowaniu różnicy centralnej drugiego lub czwartego rzędu. Dla wybranego przypadku linii napowietrznej 110 kV autorzy dokonali porównania wpływu zastosowanego rzędu różnicy centralnej na czas wykonania obliczeń oraz wartość maksymalnego błędu względnego symulacji.

**Abstract.** For the digital identification of intensity of electrical component of the electromagnetic field the method can be used where the continuous description of the potential distribution with differential equations is transformed to a discrete differences description with the grid of nodes. Depending on the complication level for construction of the central difference of the searched function with the differences description the value for each node of a grid can be calculated in a standard way with central differences of second or fourth order. For the selected case of the 110 kV overhead power line, the authors compared the influence of the applied order of the central difference on the calculation time and the value of the maximum relative error of the simulation. (*Analysis of digital simulation methods of electric field identification for central differences second or fourth order for case power line 110 kV*)

**Słowa kluczowe:** pole elektryczne, symulacje cyfrowe, linie elektroenergetyczne, bezpieczeństwo środowiska.

**Keywords:** electric field, digital simulations, power lines, environmental safety.

### Wstęp

Obiekty elektroenergetyczne powszechnie obecne we współczesnym środowisku są źródłami pola elektromagnetycznego. Zgodnie z teorią elektromagnetyzmu istnienie ładunków elektrycznych powoduje powstawanie składowej elektrycznej pola elektromagnetycznego wyrażanego w [kV/m]. Jeśli ładunki te przemieszczają się wraz z przepływem prądu elektrycznego, stanowią źródło składowej magnetycznej pola elektromagnetycznego wyrażanej w [A/m]. W zakresie częstotliwości przemysłowych, przy których pracują elementy systemu elektroenergetycznego, można mówić o polu elektromagnetycznym quasistacjonarnym, przez co poszczególne jego składowe, elektryczną oraz magnetyczną, można rozpatrywać oddzielnie [1].

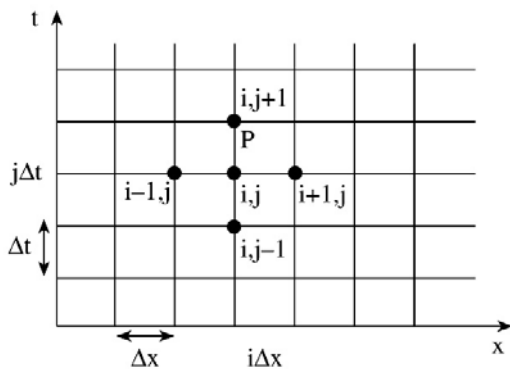
Podczas wielu procesów życiowych, jakie odbywają się wewnątrz organizmów żywych, wykorzystywany jest przepływ prądu elektrycznego czy też istnienie naturalnych pól o różnicowanym poziomie częstotliwości jak również pól stałych. Zewnętrzne, sztucznie wytworzone pole elektromagnetyczne może w zależności od natężenia mniej lub bardziej wpływać na te procesy. W zależności od wielu czynników wpływ pola elektromagnetycznego na ożywione elementy natury może być pozytywny lub w zależności od jego częstotliwości, natężenia, czy też czasu ekspozycji może być wręcz destrukcyjny [2]. Każdy organizm charakteryzuje się indywidualnymi, osobniczymi cechami, dzięki którym może się w pewnym stopniu zaadaptować lub wewnątrz niego może zachodzić regeneracja w zależności od istniejących warunków zewnętrznych. Ze względu na opisane powyżej powody nie jest łatwo w sposób jednoznaczny ocenić wpływ czynnika zewnętrznego, jakim jest pole elektromagnetyczne, na organizmy żywe. Tym niemniej stosuje się zasadę maksymalnego ograniczenia natężenia sztucznych pól elektromagnetycznych generowanych przez obiekty elektroenergetyczne w celu obciążania środowiska w jak najmniejszym stopniu.

Jako obowiązujący akt prawny regulujący kwestie natężenia poszczególnych składowych pola należy wymienić Rozporządzenie Ministra Zdrowia w sprawie dopuszczalnych poziomów pól elektromagnetycznych w środowisku [3]. Na terenach przeznaczonych pod

zabudowę mieszkaniową składowa elektryczna nie powinna przekraczać wartości 1 kV/m, natomiast składowa magnetyczna nie może być wyższa niż 60 A/m. W celu sprawdzenia dotrzymania tych poziomów powszechnie stosuje się numeryczne metody identyfikacji natężenia rozkładów pola elektromagnetycznego [4, 5]. Poszczególne metody mogą występować w różnych wariantach wynikających m. in. z symetrii układu, zastosowanych uproszczeń itp.

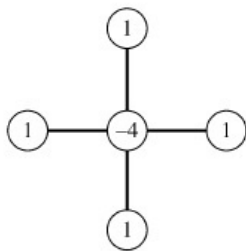
### Metody identyfikacji natężenia pola elektrycznego

Stosowana do obliczeń rozkładu składowej elektrycznej pola elektromagnetycznego metoda różnicowa posiada wiele odmian związanych z konstrukcją różnicy centralnej, przy pomocy której dokonuje się dyskretyzacji równania różniczkowego opisującego dane zagadnienie (Rys. 1) [5]. Od tego, ile wyrazów rozwinięcia w szereg Taylora zostanie wykorzystanych do wyliczenia wartości poszukiwanej funkcji w wybranym punkcie, zależy dokładność obliczeń. Jedną z konsekwencji rzędu metody jest liczba punktów siatki, na podstawie których jest wyznaczana wartość poszukiwanej funkcji. W każdej iteracji dokonuje się przeliczenia nowej wartości poszukiwanej funkcji kolejno dla wszystkich węzłów siatki. Maksymalna wartość bezwzględna różnicy pomiędzy wartością wyliczoną w poprzedniej oraz w bieżącej iteracji to jest błąd, z jakim wyznaczono rozwiązanie w bieżącej iteracji. Serię obliczeń można zakończyć wtedy, gdy ten błąd jest mniejszy niż wymagana dokładność rozwiązania numerycznego. Funkcję opisującą rozkład potencjału elektrycznego w poszczególnych punktach siatki elementów różnicowych można rozwinąć w szereg Taylora. Ponieważ każdy kolejny wyraz rozwinięcia jest coraz mniej znaczący, to celowym jest odrzucenie dalszych jego wyrazów w celu uproszczenia analiz numerycznych. Na tej podstawie buduje się tzw. centralną różnicę funkcji stanowiącą transformację pomiędzy równaniem różniczkowym a równaniem różnicowym, dla którego węzły siatki stanowią współrzędne, na podstawie których wyliczana jest wartość funkcji potencjału dla każdego punktu siatki. Na podstawie tak wyliczonych wartości potencjału można wyznaczyć rozkład natężenia pola elektrycznego w obszarze rozwiązania.



Rys.1. Fragment siatki elementów różnicowych [5]

Dla metody drugiego rzędu są to cztery punkty bezpośrednio sąsiadujące w pionie oraz w poziomie z punktem, dla którego wylicza się wartość funkcji  $\Phi$  w trakcie każdej iteracji (Rys. 2).

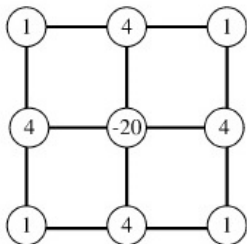


Rys.2. Węzły siatki elementów różnicowych wraz z ich wagami we wzorze na różnicę centralną drugiego rzędu [5]

Wzór opisujący wartość poszukiwanej funkcji dla metody różnicowej drugiego rzędu ma postać:

$$(1) \Phi[i,j]=0,25*(\Phi[i-1,j]+ \Phi[i,j-1]+ \Phi[i+1,j]+ \Phi[i,j+1])$$

Dla metody rzędu czwartego oprócz wartości funkcji w punktach sąsiadujących w pionie i w poziomie dodatkowo brane są również punkty położone ukośnie w stosunku do punktu dla którego wylicza się wartość funkcji  $\Phi$  (Rys 3).



Rys.3. Węzły siatki elementów różnicowych wraz z ich wagami we wzorze na różnicę centralną czwartego rzędu [5]

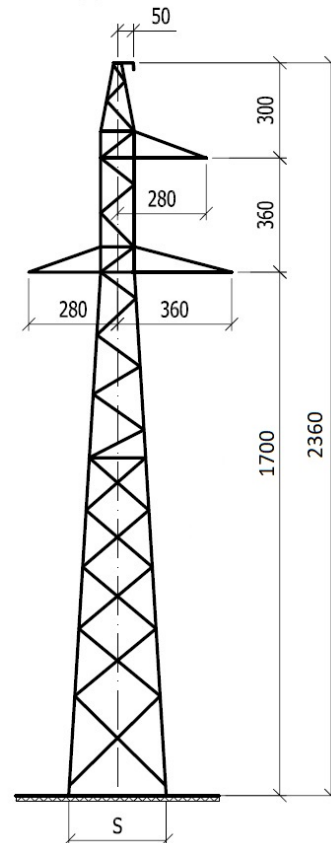
Wzór opisujący wartość poszukiwanej funkcji dla metody różnicowej czwartego rzędu ma postać:

$$(2) \Phi[i,j]=0,2*(\Phi[i-1,j]+ \Phi[i,j-1]+ \Phi[i+1,j]+ \Phi[i,j+1])+ +0,05*(\Phi[i+1,j+1]+ \Phi[i+1,j-1]+ \Phi[i-1,j+1]+ \Phi[i-1,j-1])$$

### Pole elektryczne generowane przez napowietrzną linię 110 kV (CJ B2-P)

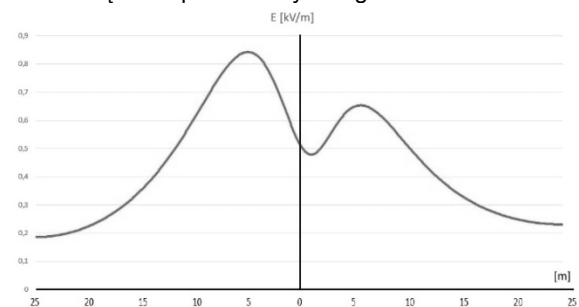
W niniejszym artykule analizie obliczeniowej poddano rozkład pola elektrycznego generowanego przez linię napowietrzną o napięciu znamionowym 110 kV zbudowaną na typowych konstrukcjach słupów przelotowych typu B2-P. Sylwetkę słupa wraz z najważniejszymi wymiarami

przedstawiono na rysunku (Rys. 4), przy czym wysokość zawieszenia przewodów fazowych w badanym przekroju poprzecznym linii elektroenergetycznej wynosi 10,5 m, ponieważ uwzględniono długość izolatorów oraz zwis przewodów. Obszar rozwiązania podzielono na regularną siatkę o 500 tys. węzłów rozmieszczonych w odległości 5 cm. Dla wybranego przypadku linii elektroenergetycznej dokonano cyfrowej symulacji rozkładu potencjału oraz natężenia pola elektrycznego po wykonaniu odpowiednio: 1 000, 10 000, 100 000 oraz 1 000 000 iteracji. Powyższą serię symulacji cyfrowych dla różnej liczby iteracji wykonano przy zastosowaniu różnic centralnych drugiego oraz czwartego rzędu.



Rys.4. Sylwetka słupa przelotowego linii 110 kV typu CJ B2-P

rozkład natężenia pola elektrycznego charakteryzuje się występowaniem dwóch lokalnych maksimum oraz jednego lokalnego minimum. Ze względu na niesymetryczną geometrię linii względem pionowej osi słupa wypadkowy rozkład pola elektrycznego pochodzącego od takiej linii również będzie miał formę niesymetryczną. Spowodowane jest to wzajemnymi interakcjami pomiędzy przewodami fazowymi linii i wpływem tego zjawiska na wypadkową wartość natężenia pola elektrycznego.

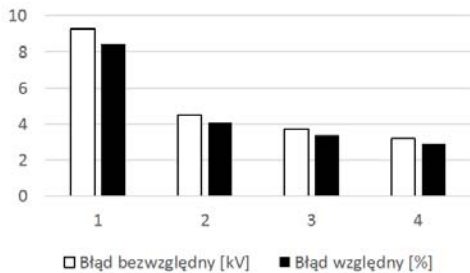


Rys.5. Rozkład pola elektrycznego obliczony dla wysokości  $h=2\text{m}$  generowanego przez linię napowietrzną 110 kV (słup: CJ B2-P)

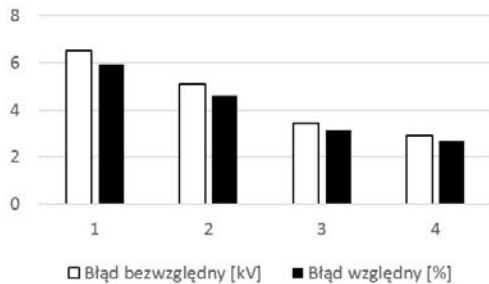
W tabeli 1 zestawiono wyniki symulacji, gdzie uwzględniono błąd względny oraz błąd bezwzględny, z jakimi wykonano obliczenia dla określonej liczby iteracji oraz wybranego rzędu metody.

Tabela 1. Błąd względny oraz błąd bezwzględny w zależności od rzędu metody oraz liczby iteracji

Rząd metody	Liczba iteracji	Błąd bezwzględny [kV]	Błąd względny [%]
2	1 000	9,29	8,45
2	10 000	4,49	4,08
2	100 000	3,73	3,39
2	1 000 000	3,19	2,90
4	1 000	6,51	5,92
4	10 000	5,08	4,62
4	100 000	3,45	3,14
4	1 000 000	2,93	2,66



Rys.6. Błąd względny oraz błąd bezwzględny dla metody drugiego rzędu

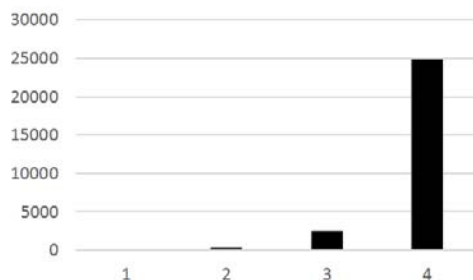


Rys.7. Błąd względny oraz błąd bezwzględny dla metody czwartego rzędu

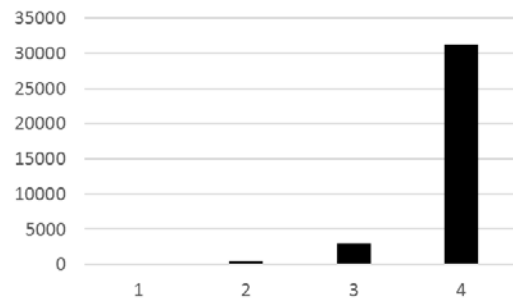
W tabeli 2 zestawiono wyniki symulacji, gdzie uwzględniono całkowity czas trwania obliczeń dla określonej liczby iteracji oraz wybranego rzędu metody.

Tabela 2. Czas trwania obliczeń w zależności od rzędu metody oraz liczby iteracji

Rząd metody	Liczba iteracji	Czas trwania obliczeń [s]
2	1 000	38
2	10 000	277
2	100 000	2 531
2	1 000 000	24 895
4	1 000	52
4	10 000	483
4	100 000	3 026
4	1 000 000	31 264



Rys.8. Czas trwania obliczeń wyrażony w sekundach dla metody drugiego rzędu



Rys.9. Czas trwania obliczeń wyrażony w sekundach dla metody czwartego rzędu

## Wnioski

Zastosowanie metody różnicowej wyższego rzędu wpływa na poprawę zbieżności wartości funkcji potencjału elektrycznego. Daje się zauważyć efekt uzyskania rozwiązania o założonej dokładności po mniejszej liczbie iteracji.

Metoda różnicowa czwartego rzędu wymaga przeprowadzenia większej liczby operacji matematycznych w celu wyznaczenia wartości poszukiwanej wartości w danym punkcie siatki. W porównaniu do metody drugiego rzędu dwukrotnie większa jest liczba punktów, na podstawie których wylicza się wartość poszukiwanej funkcji w bieżącym kroku iteracji. Jest to głównym powodem wydłużenia czasu obliczeń dla pojedynczej iteracji.

Metoda różnicowa wyższego rzędu może okazać się szczególnie zalecana dla zagadnień lub obszarów, gdzie gradient poszukiwanej funkcji jest duży. Kolejne wyrazy rozwinięcia szeregu odcinane w metodzie niższego rzędu nie zawsze są zaniedbywalnie małe i może to wносить dodatkowe błędy do obliczeń numerycznych podczas identyfikacji natężenia pola elektrycznego.

**Autorzy:** dr hab. Dariusz Szafrowski prof. PWr, Politechnika Wroclawska, Katedra Energoelektryki, ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, E-mail: [dariusz.szafrowski@pwr.edu.pl](mailto:dariusz.szafrowski@pwr.edu.pl); mgr inż. Jacek Gumieła, Politechnika Wroclawska, Katedra Energoelektryki, ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, E-mail: [jacek.gumieła@wpwr.edu.pl](mailto:jacek.gumieła@wpwr.edu.pl).

## LITERATURA

- [1] Szuba M., Linie i stacje elektroenergetyczne w środowisku człowieka, wydanie 4, Biuro Konsultingowo-Inżynierskie „EKO-MARK”, (2008)
- [2] Łukaszewicz M., Szafrowski D., Pola elektromagnetyczne: leczą czy zabijają?, Aura 10, (2006)
- [3] Rozporządzenie Ministra Zdrowia z dnia 17 grudnia 2019, W sprawie dopuszczalnych poziomów pól elektromagnetycznych w środowisku Dziennik Ustaw 23, 2448, (2019)
- [4] Zenczak M., Estimation of electric and magnetic fields intensities under power transmission lines in real country conditions Przegląd Elektrotechniczny 7, (2008)
- [5] Sadiku M. N.O., Numerical Techniques in Electromagnetics; Second Edition; CRC Press, (2001)