

doi:10.15199/48.2020.12.37

## Analityczno-numeryczna metoda obliczania rozkładu gęstości prądu toru prądowego z przewodami o przekroju kołowym

**Streszczenie.** Zaproponowano numeryczno-analityczną metodę analizy torów prądowych z przewodami o przekroju kołowym. Metoda wywodzi się ze znanego podejścia, aby sąsiednie przewody traktować jak nitkowe. Polega na obliczeniu kolejnych poprawek uwzględniających skończone rozmiary przewodów. Jak przykład rozpatrzono tory trójfazowe w różnych konfiguracjach. Otrzymane poprawki w gęstości prądu sięgały 10%.

**Abstract.** A numerical-analytical method of analyzing current busducts with wires of circular cross-section was proposed. The method is derived from the approach to treat the neighboring wires as current filaments. It consists in calculating subsequent corrections taking into account the finite sizes of wires. Three-phase circuits in various configurations were considered. The obtained corrections in the current density reached up to 10%. (A numerical-analytical method of analyzing current busducts with wires of circular cross-section)

**Słowa kluczowe:** gęstość prądu, tor wieloprzewodowy, włókno prądowe, metoda kolejnych reakcji.

**Keywords:** current density, multiwire busduct, current filament, successive reactions.

### Wprowadzenie

Układ przewodów o przekroju kołowym jest bardzo często stosowany w liniach przesyłowych i torach prądowych. Przykładowo w trójfazowej linii kablowej znajdują się często trzy cylindryczne przewody w aranżacji płaskiej lub trójkąta równobocznego [1]. Wskutek zjawiska indukcji elektromagnetycznej w każdym przewodzie indukowane są prądy wirowe, które często formalnie rozdziela się na pochodzące od zjawiska naskórkowości oraz zjawiska zbliżenia. Prądy te zmieniają gęstości prądów w przewodach. W konsekwencji całkowite gęstości prądu w przewodnikach stają się nierównomierne i niesymetryczne i znacząco wpływają na pole elektromagnetyczne, straty mocy w przewodach oraz macierz impedancji takiego układu przewodników [2-3]. Wiedza na temat rozkładu gęstości prądu jest istotna i niezbędna do określenia właściwości sieci takich linii oraz projektowania ich zwłaszcza w przypadku torów o dużych prądach lub częstotliwościach.

Pomimo ogromnego rozwoju metod numerycznych i powstania wielu pakietów obliczeniowych, zwłaszcza korzystających z metody elementów skończonych, wciąż istnieje potrzeba stosowania zależności analitycznych, nawet, jeśli są one przybliżone. Wynika to z tego, że metody numeryczne, choć nieograniczone geometrią układu i innymi aspektami, nie dają zależności ogólnych, które można by poddać analitycznej ocenie i wyciągnąć z nich pewne wnioski ogólne. Poza przypadkiem kabla współosiowego otrzymanie czysto analitycznych rozwiązań napotyka poważne problemy matematyczne. Przykładowo, w metoda rozdzielania zmiennych nie daje się zastosować już w przypadku dwóch przewodów o przekroju kołowym o skończonych rozmiarach. Zaproponowano wiele podejść mających na celu uzyskanie przybliżonych rozwiązań, np.:

- wprowadzanie znacznych uproszczeń - np. założenie, że sąsiednie przewody wytwarzają w przybliżeniu równomierne pole magnetyczne w miejscu obecności danego przewodu [4] lub też traktowanie sąsiednich przewodów jako nieskończenie cienkich (np. [5-6]);
- stosowanie przybliżonych wyrażeń analitycznych, np. w pracy [7] wyrażono gęstość prądu w postaci szeregu potęgowego, a pracy [8] zastosowano rozwinięcie multipolowe ze skończoną liczbą wyrazów;
- stosowanie metod numerycznych, zwłaszcza elementów skończonych (np. [9]), elementów brzegowych (np. [10]), FTDT (np. [11]), rozwiązywanie równania Fredholma z różnymi funkcjami bazowymi [12];
- używanie metod analityczno-numerycznych, np. metody Bubnowa-Galerkina i rozdzielania zmiennych [13];

- dyskretyzacja przewodów jako linii wiązkowej o wielu przewodach o „małym” przekroju poprzecznym [2,3,14].

Powyższe wskazuje, że rozpatrywana tematyka jest ciągle aktualna. Najbardziej wartościowe są proste rozwiązania analityczne. Podejście takie zaprezentowano m.in. w pracach [3,5], gdzie sąsiednie przewody zastąpiono włóknami prądowymi. W pracy [15] zaproponowano uwzględnienie skończonych rozmiarów sąsiednich przewodów w sposób przybliżony jako wiązki włókien w przypadku dwóch przewodów. W niniejszej pracy zastosowano tę metodę do obliczeń dotyczących torów trójfazowych w różnych układach. Warto podkreślić, że chociaż metoda wymaga pewnych obliczeń numerycznych, to nie jest konieczne rozwiązywanie układu równań algebraicznych.

### Przedstawienie zagadnienia

Punktem wyjścia jest model toru prądowego w postaci układu  $K$  nieskończenie długich równoległych przewodów umieszczonych w nieprzewodzącym i niemagnetycznym środowisku. Wszystkie przewody są niemagnetyczne, mają niezmienny kołowy przekrój poprzeczny ( $R_k$  - promień  $k$ -tego przewodu,  $\sigma_k$  - jego przewodność,  $k = 1, 2, \dots, K$ ) Zakłada się, że wiodą prądy sinusoidalne o pulsacji  $\omega$  o zespolonej wartości skutecznej  $I_k$ . Powyższe założenia pozwalają zastosować obliczenia 2D w przekroju poprzecznym konfiguracji. Z uwagi na domyślne założenie liniowości gęstość prądu w  $k$ -tym przewodzie można wyrazić jako

$$(1) \quad \underline{J}_i = \sum_{k=1}^K W_{ik} \underline{I}_k = W_{ii} \underline{I}_i + \sum_{k=1, k \neq i}^K W_{ik} \underline{I}_k = \underline{J}_i^s + \underline{J}_i^p$$

gdzie  $W_{ik}$  są w ogólności funkcjami rozmiarów, położenia przewodów, częstotliwości i właściwości materiałowych, lecz nie zależą od prądów. Wyodrębniając część zależną od prądu w tym przewodzie i część zależną od pozostałych prądów, gęstość prądu można formalnie przedstawić jako część związaną z efektem naskórkowości (indeks górny „s” - skin effect) oraz z efektem zbliżenia (indeks górny „p” - proximity effect). Znalezienie ściśle dokładnych funkcji  $W_{ik}$  jest możliwe tylko szczególnych przypadkach o symetrii współosiowej. W przypadku układu przewodów walcowych idea zaprezentowana m.in. w pracach [6-11] polega na tym, że w obliczeniach dotyczących  $k$ -tego przewodu wszystkie pozostałe przewody traktowane są jak nieskończenie cienkie włókna. Pozwala to uzyskać w pełni analityczne rozwiązanie zagadnienia zastępczego, które często wystarcza w praktyce. Rozwiązanie to będzie oznaczone tutaj chwilowo tyldą:

$$(2) \quad \tilde{W}_{ii} = \frac{1}{\pi R_i^2} \frac{\Gamma_i R_i}{2} \frac{I_0(\Gamma_i r)}{I_1(\Gamma_i R_i)}, \quad \Gamma_i = \sqrt{j\omega\mu_0\sigma_i} = \frac{1+j}{\delta_i}$$

$$(3) \quad \tilde{W}_{ik} = \frac{1}{\pi R_i^2} A\left(\frac{r}{R_i}, \theta - \theta_k; \frac{R_i}{r_k}, \Gamma_i R_i\right)$$

gdzie  $I_n$  - zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu  $n$ ,  $(r, \theta)$  - współrzędne punktu w układzie biegunowym związanym z  $i$ -tym przewodem,  $(r_k, \theta_k)$  - współrzędne biegunowe środka  $k$ -tego przewodu tym układzie współrzędnych,  $\delta_i$  - głębokość wnikania pola do  $i$ -tego przewodu, natomiast

$$(4) \quad A(\rho, \varphi; \zeta, \gamma) = -\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n \frac{I_n(\rho\gamma)}{I_{n-1}(\gamma)} \cos n\varphi$$

Przedstawiony sposób jest przybliżony, gdyż zaniedbuje skończone rozmiary przekroju poprzecznego sąsiednich przewodów. Powstaje pytanie, jaki błąd powoduje takie zaniedbanie. Aby go oszacować, potrzebne jest porównanie z rozwiązaniem dokładnym. Takiego jednak w ogólności nie ma. Wobec tego z takie należy przyjąć rozwiązanie uzyskane bądź innymi metodami przybliżonymi (np. FEM), bądź też skonstruować dokładniejsze przybliżenie rozwiązania oryginalnego problemu. W dalszej części pracy wykorzystano obydwa podejścia.

#### Metoda wyznaczania poprawek do rozwiązania

Przedstawiona niżej procedura oparta jest na zasadzie kolejnych reakcji. Rzecz jasna, jest to zabieg czysto formalny, mający na celu zwiększanie dokładności rozwiązania. W zerowym kroku uwzględniane jest tylko zjawisko naskórkowości. Wywołane nim gęstość prądu  $J_i^s$  będzie oznaczana dalej przez  $J_i^{(0)}$ . Te prądy płynące w sąsiednich przewodach wywołują prądy wirowe  $J_i^p$  oznaczane dalej przez  $J_i^{(1)}$ . Ponieważ  $J_i^{(0)}$  ma rozkład niezależny od współrzędnej kątowej, pole magnetyczne na zewnątrz każdego z sąsiednich przewodów jest takie jak od zastępczego przewodu nitkowego. Stąd też poprawka  $J_i^{(1)}$  często opisuje zjawisko zbliżenia w sposób wystarczająco dokładny. Zaindukowane w przewodzie prądy wirowe o gęstości  $J_i^{(1)}$  oddziałują wytworzonym polem magnetycznym na sąsiednie przewody i wywołują w nich prądy wirowe dodatkowe prądy wirowe. Oznaczmy ich gęstość przez  $J_i^{(2)}$ . Oczywiście te prądy wywołują dalsze poprawki, a wypadkowa gęstość prądu po uwzględnieniu  $M$  reakcji wynosi

$$(5) \quad \underline{J}_i^{[M]}(X) = \sum_{m=1}^M \underline{J}_i^{(m)}(X)$$

gdzie

$$(6) \quad \underline{J}_i^{(m)}(X) = -\frac{\Gamma_i^2}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K \iint_{S_k} \underline{J}_k^{(m-1)}(Y) \ln \frac{1}{|X-Y|} dS_Y$$

Istotną rzeczą jest obliczenie  $m$ -tej poprawki. Obliczenie jej w sposób analityczny sprawia problem dla  $m \geq 2$ . W pracy ograniczono się do uproszczonej numerycznej realizacji tych obliczeń. W tym celu każdy z przewodów dzieli się na sektory i przypisuje im prądy o gęstości wynikającej z poprawki  $m-1$ :

$$(7) \quad \underline{I}_{ks}^{(m-1)} = \underline{J}_k^{(m-1)}(r_{ks}, \theta_{ks}) S_{ks}$$

gdzie  $(r_{ks}, \theta_{ks})$  są współrzędnymi środka  $s$ -tego sektora  $k$ -tego przewodu, zaś  $S_{ks}$  - jest polem powierzchni tego sektora. Następnie korzysta się z rozwiązania dla przewodu walcowego i znajdującego się w jego pobliżu włókna. Następnie oblicza się poprawkę do gęstości prądu w sąsiednich przewodach od tego włókna wg wzoru (6), który prowadzi do zależności:

$$(8) \quad \underline{J}_i^{(m)}(r, \theta) = \sum_{k,s} \frac{\underline{I}_{ks}^{(m-1)}}{\pi R_i^2} A\left(\frac{r}{R_i}, \theta - \theta_{i,ks}; \frac{R_i}{r_{i,ks}}, \Gamma_i R_i\right)$$

gdzie funkcja  $A$  dana jest wzorem (4), natomiast  $(r_{i,ks}, \theta_{i,ks})$  są współrzędnymi środka  $s$ -tego sektora  $k$ -tego przewodu we układzie biegunowym związanym z  $i$ -tym przewodem. Jeśli wprowadzimy  $K$  wektorów kolumnowych o elementach będących gęstością prądu

$$(9) \quad \underline{J}_k^{(m)} = \left\{ \underline{J}_k^{(m)}(r_{ks}, \theta_{ks}) \right\}_s$$

oraz  $K$  macierzy

$$(10) \quad A_i = \left[ \frac{S_{ks}}{\pi R_i^2} A\left(\frac{r}{R_i}, \theta - \theta_{i,ks}; \frac{R_i}{r_{i,ks}}, \Gamma_i R_i\right) \right]_{ks}$$

to można zapisać

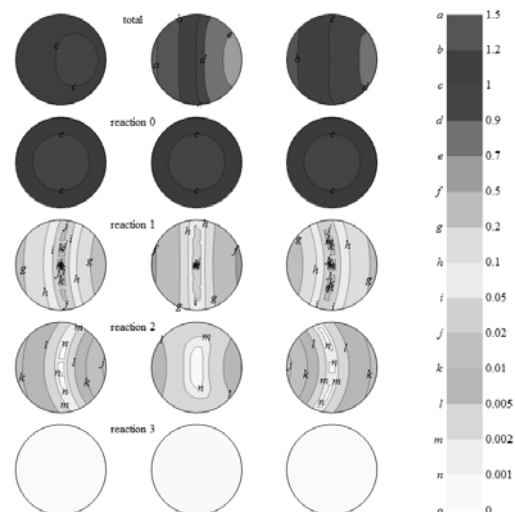
$$(11) \quad \underline{J}_k^{(m)} = \sum_{i=1, i \neq k}^K A_i \underline{J}_i^{(m-1)}$$

Oznacza to, że  $m$ -tą poprawkę (jej numeryczną postać) można uzyskać bez rozwiązywania układu równań, lecz znając jedynie poprawkę poprzednią. Macierze  $A_i$  można przygotować raz na początku obliczeń. Wadą jest to, że jest to obliczenie tych macierzy jest dość kosztowne czasowo. Jednak po ich obliczeniu można uzyskać dowolną poprawkę, a w efekcie dowolnie dokładne przybliżenie rozwiązania.

#### Przykład - analiza torów trójfazowych

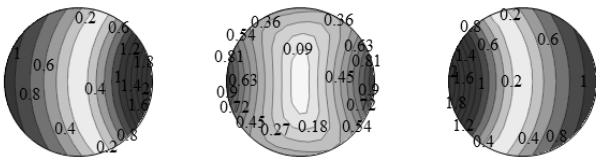
W charakterze przykładu rozpatrzono typowe układy trójfazowych torów prądowych z jednym szynoprzewodem na fazę. Rozpatrywano konfiguracje płaskie i trójkątne bez przewodu i z przewodem neutralnym oraz dodatkowo układ czworokątny z przewodem neutralnym. Przyjęto, że wszystkie przewody są jednakowe i mają promień  $R$ , a odległości między sąsiednimi najbliższymi przewodami jest jednakowa i wynosi  $d$ .

Na rysunku 1 przedstawiono rozkład gęstości prądu w przypadku jednej z konfiguracji (układ płaski trójprzewodowy) dla przypadku  $R/\delta = 1$  oraz  $d/R = 3$ . Wartości poprawki  $m=2$  (pierwsza korekta do wzoru przybliżonego) wynosi w tym przypadku do około 2% gęstości prądu DC, następna reakcja to około 0,1%, dalsze (nie zaznaczone) są o rzędy wielkości mniejsze.



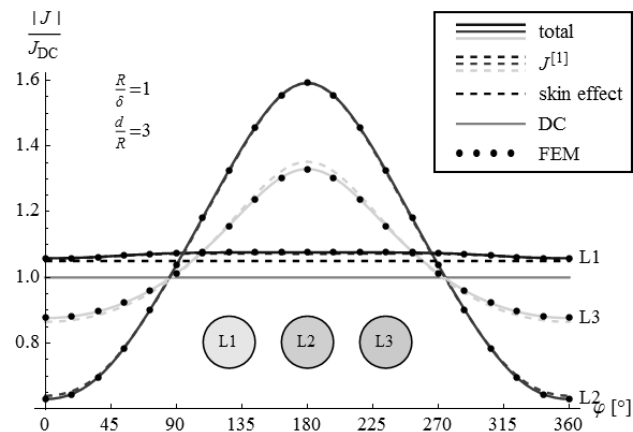
Rys.1. Względny rozkład gęstości prądu (górny rząd) oraz jej kolejne składowe (dalsze rzędy) trójprzewodowym torze trójfazowym w układzie płaskim dla  $d/R = 3$ ,  $R/\delta = 1$  i symetrycznym zgodnym układzie faz

Rysunek 2 przedstawia procentowy błąd w rozkładzie gęstości prądu dla  $M = 1$  (klasyczne przybliżenie) i  $M = 6$  (uznane za dokładne) w rozpatrywanym wyżej przypadku. Błąd sięga maksymalnie około 2%. Warto zwrócić uwagę, że największe różnice występują na powierzchni przewodów.



Rys.2. Rozkład procentowego błędu w gęstości prądu w trójprzewodowym torze w układzie płaskim z prądami symetrycznymi kolejności zgodnej dla  $d/R = 3$ ,  $R/\delta = 1$

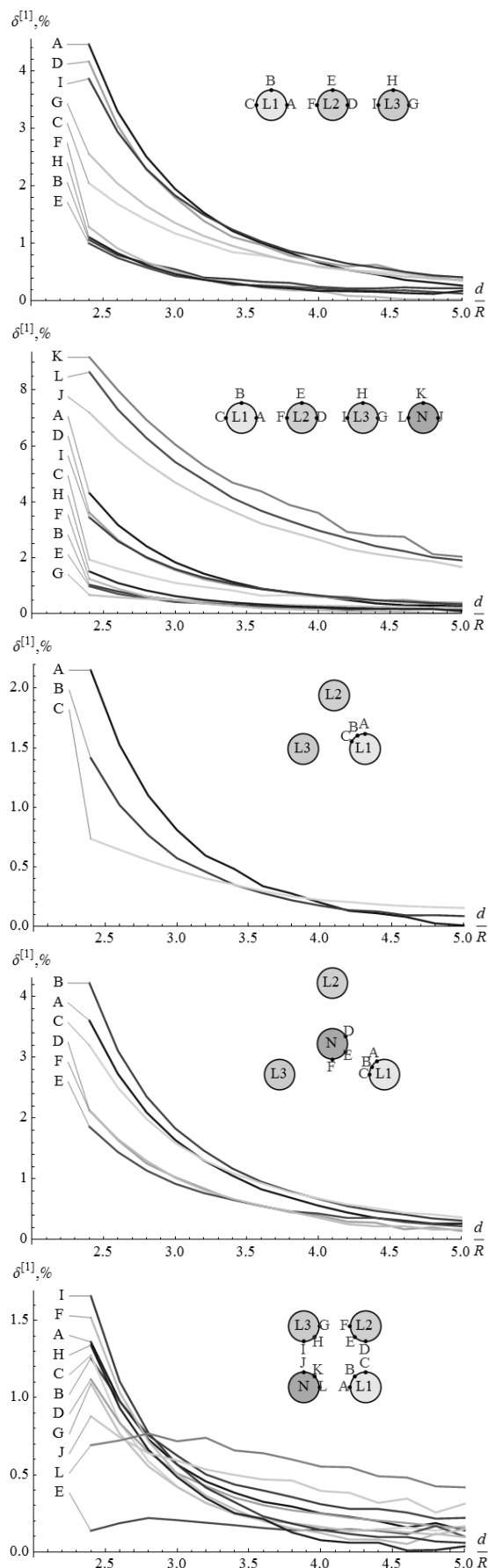
Rysunek 3 przedstawia rozkład gęstości prądu na powierzchni przewodów dla rozpatrywanego przypadku. Liniami ciągłymi zaznaczono rozwiązanie  $J^{[6]}$ , a liniami przerywanymi rozwiązanie  $J^{[1]}$ . Zaznaczono także rozwiązanie uzyskane metodą elementów skończonych, które pokrywa się z uzyskanym opisaną wyżej metodą. Przybliżone rozwiązanie w tym przypadku tylko analityczne  $J^{[1]}$  tylko nieznacznie różni się od  $J^{[6]}$  i  $J_{FEM}$  i z powodzeniem można stosować przybliżone rozwiązanie  $J^{[1]}$ .



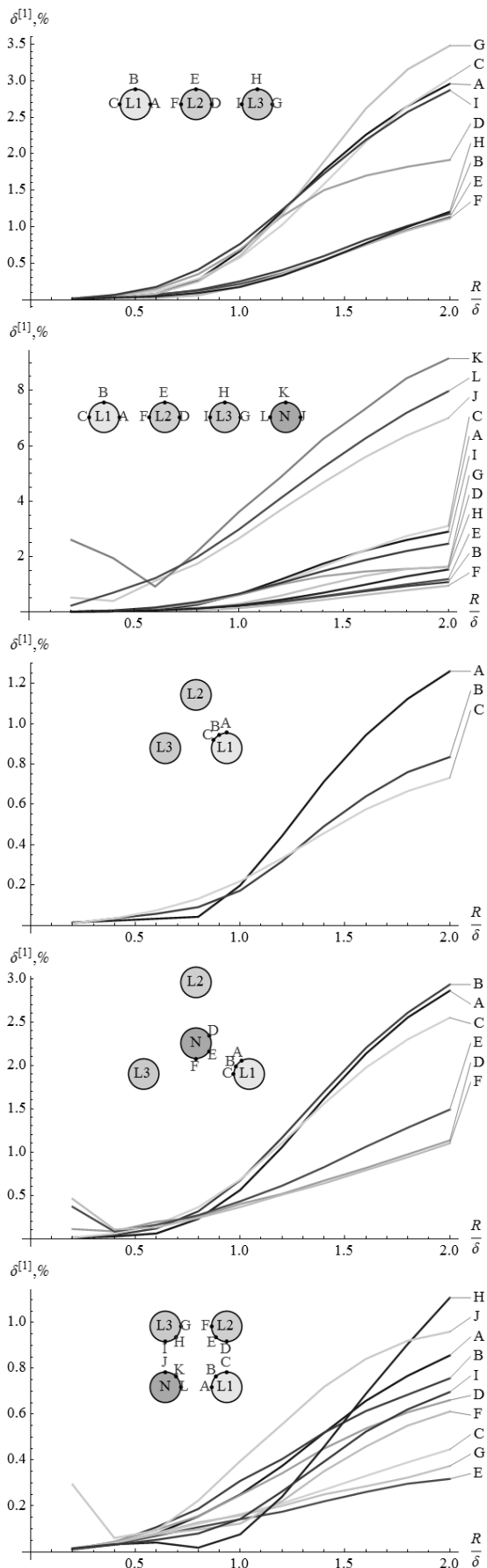
Rys.3. Rozkład względnej gęstości prądu na powierzchni trójprzewodowego toru w układzie płaskim z prądami symetrycznymi kolejności zgodnej dla  $d/R = 3$ ,  $R/\delta = 1$

W przedstawionym przykładzie poprawka do rozwiązania przybliżonego  $J^{[1]}$  wynosi do około 2%, a więc jest w praktyce pomijalnie mała. Jednak nie zawsze tak jest, gdyż zależy to m.in. od odległości między przewodami. Na rysunku 4 pokazano wpływ odległości między przewodami na procentowy błąd względny rozwiązania przybliżonego  $J^{[1]}$  względem  $J^{[6]}$  (uznanego praktycznie dokładne) w wybranych punktach różnych konfiguracji trójfazowych torów prądowych z jednym przewodem na fazę z prądami symetrycznymi kolejności zgodnej dla  $R/\delta = 1$ . Największe błędy występują w konfiguracji płaskiej z przewodem neutralnym i dla  $d = 2,4R$  sięgają około 9% (w przewodzie neutralnym) do 5% w przewodach fazowych.

Na poprawki wpływ ma także głębokości wnikania pola. Przedstawione wyżej rozważania dotyczyły przypadku, gdy głębokość wnikania pola była równa promieniowi  $R$ . Dla wyższych harmonicznych będzie ona znacznie mniejsza, w związku z tym na rysunku 5 przeanalizowano wpływ głębokości wnikania pola na zmiany w rozkładzie gęstości prądu dla różnych konfiguracji w przypadku  $d/R = 3$ . Wynika z niego, że wzrost częstotliwości powoduje zwiększenie błędów.



Rys.4. Zależność procentowego błędu rozwiązania  $J^{[1]}$  w wybranych punktach typowych konfiguracji torów trójfazowych w funkcji odległości między przewodami w wybranych torach dla  $(R/\delta = 1)$ , prądy symetryczne kolejności zgodnej)



Rys.5. Zależność procentowego błędu rozwiązania  $J^{[1]}$  w wybranych punktach typowych konfiguracji torów trójfazowych w funkcji  $R/\delta$  (prądy symetryczne kolejności zgodnej,  $d/R = 3$ )

## Wnioski

Zaproponowana metoda pozwala w drodze kolejnych poprawek uwzględnić skończone rozmiary sąsiednich przewodów. Jeśli rozmiary przewodów są mniejsze od głębokości wnikania pola oraz od odległości między przewodami, poprawki można zaniedbać. Tak jest w przypadku torów trójfazowych dla podstawowej harmonicznej, jednak obecność wyższych harmonicznych o dużych amplitudach może istotnie wpłynąć na rozkład gęstości prądu i dodatkowe straty z tym związane.

**Authors:** dr hab. inż. Paweł Jabłoński, prof. uczelni, Politechnika Częstochowska, Katedra Automatyki, Elektrotechniki i Optoelektroniki, al. Armii Krajowej 17, 42-200 Częstochowa, E-mail: [pawel.jablonski@pcz.pl](mailto:pawel.jablonski@pcz.pl); dr hab. inż. Tomasz Szczegielniak, prof. uczelni, Politechnika Częstochowska, Katedra Automatyki, Elektrotechniki i Optoelektroniki, al. Armii Krajowej 17, 42-200 Częstochowa, E-mail: [tomasz.szczegielniak@pcz.pl](mailto:tomasz.szczegielniak@pcz.pl); dr inż. Dariusz Kusiak, Politechnika Częstochowska, Katedra Automatyki, Elektrotechniki i Optoelektroniki, al. Armii Krajowej 17, 42-200 Częstochowa, E-mail: [dariusz.kusiak@pcz.pl](mailto:dariusz.kusiak@pcz.pl).

## REFERENCES

- [1] Benato R., Paoluci A., EHV AC Undergrounding Electrical Power. Performance and Planning, Springer-Verlag London Limited, UK, 2010
- [2] Coufal O., Current density in two solid parallel conductors and their impedance, *Electric. Eng.* 2014, 96, 287-297
- [3] Piątek Z., Impedances of tubular high current busducts, Polish Acad. Sci., *Committee Elect. Engng, Ser. Progress in high-voltage technique*, Vol. 28, Wyd. Pol. Częst., Częstochowa, Poland, 2008
- [4] Roskopf A.H., Calculation of frequency dependent power losses in inductive systems with litz wire conductors by a coupled numeric approach, Doctoral thesis, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Germany, 2018
- [5] Piątek Z., Metoda obliczania prądów wirowych indukowanych w przewodzie walcowym przez prąd sinusoidalny płynący w przewodzie równoległym, *ZN Pol. Śl. Elektryka* 1981, 75, 137-150
- [6] Jabłoński P., Cylindrical conductor in an arbitrary time-harmonic transverse magnetic field, *Przegląd Elektrotechniczny* 2011, 87, 5, 49-53
- [7] Dłabać T., Filipović D., Integral equation approach for proximity effect in a two-wire line with round conductors, *Technicki Vjesnik* 2015, 22, 4, 1065-1068
- [8] Brito A., Maló Machado V., Almeida M.E., Guerreiro das Neves M., Skin and Proximity Effects in the Series-Impedance of Three-Phase Underground Cables, *Electric Power Syst. Res.* 2016, 130, 132-138
- [9] Riba J.R., Capelli F., Calculation of the inductance of conductive nonmagnetic conductors by means of finite element method simulations, *Int. J. of Electric. & Educ.* 2018, September 13, 1-23
- [10] Jabłoński P., Approximate BEM analysis of time-harmonic magnetic field due to thin-shielded wires, *Poznan Univ. of Technol. Academic J. Electric. Eng.* 2012, 69, 57-64
- [11] Shendge A., A study on a conductor system for investigation of proximity effect, *J. of Electromagn. Anal. and Appl.* 2012, 4, 440-446
- [12] Piątek Z., Kusiak D., Szczegielniak, T., Electromagnetic field and impedances of high current busducts, *Proceedings of the 2010 International Symposium*, Wrocław, Poland, 20-22 September 2010
- [13] Rolicz P., Eddy currents generated in a system of two cylindrical conductors by a transverse alternating magnetic field, *Electric Power Syst. Res.* 2009, 79, 295-300
- [14] Piątek Z., Baron B., Jabłoński P., Kusiak D., Szczegielniak T., Numerical method of computing impedances in shielded and unshielded three-phase rectangular busbar systems, *Prog. In Electromagn. Res. B* 2013, 51, 135-156
- [15] Jabłoński P., Szczegielniak T., Kusiak D., Piątek Z., Analytical-numerical solution for the skin and proximity effects in two parallel round conductors, *Energies* 2019, 12, 3584