

Efektywny dwupołożeniowy algorytm stabilizacji orbit okresowych w układach chaotycznych

Streszczenie. W pracy przedstawiony jest nowy multipunktowy algorytm w wersji dwupołożeniowej, który pozwala na efektywną stabilizację niestabilnych orbit okresowych zanurzonych w dziwnym atraktorze danego układu chaotycznego. Rozpatrywany algorytm polega na niewielkich zmianach wybranych parametrów układu w każdej chwili próbkowania, dzięki czemu jest on niezwykle efektywny w przypadku eliminacji drgań chaotycznych w złożonych układach nieliniowych w obecności silnych zakłóceń i szumów.

Abstract. The paper presents a new multipoint algorithm in a two-level version, which allows for effective stabilization of unstable periodic orbits immersed in a strange attractor of a given chaotic system. The considered algorithm applies small changes of selected parameters of the system in each sampling step, thanks to which it is extremely effective in the elimination of chaotic oscillations in complex non-linear systems in the presence of strong disturbances and noise. (**Effective two-level algorithm for stabilizing periodic orbits of chaotic systems**).

Słowa kluczowe: drgania chaotyczne, układy nieliniowe, stabilizacja orbit okresowych, dziwne atraktory.

Keywords: chaotic oscillations, non-linear systems, stabilization of periodic orbits, strange attractors.

Wstęp

Na początku poprzedniego stulecia uważano, że stany chwilowe układów deterministycznych są przewidywalne, a więc znając opis matematyczny dynamiki danego układu oraz warunki początkowe w nim panujące, można określić jego stan w dowolnym przyszłym momencie. Okazało się jednak, że istnieją pewne układy nieliniowe z elementami o specyficznych charakterystykach napięciowo-prądowych, które charakteryzują się silną wrażliwością na zmiany warunków początkowych. Ponadto przebiegi określonych zmiennych stanu owych układów przypominają przebiegi zupełnie przypadkowe [1-4]. Gwałtowny wzrost zainteresowania ośrodków badawczych tematyką związaną z dynamiką chaotyczną można było zaobserwować w ciągu ubiegłych 30 lat. Fakt ten wynikał z szerokiego zastosowania komputerów do rozwiązywania problemów nieliniowych. Należy podkreślić, że drgania chaotyczne nie mogą pojawić się w układach liniowych.

Z uwagi na fakt, że drgania chaotyczne są z reguły niepożądane, zaczęto prowadzić intensywne prace badawcze zmierzające do wynalezienia odpowiednich metod sterowania pozwalających na eliminację tych niezwykle niekorzystnych zjawisk [4-14]. Okazuje się, że obok skutecznych metod przewidywania stanów chaotycznych [15-18], opracowanie efektywnych strategii sterowania jest jednym z najważniejszych problemów, jaki pojawia się przy analizie układów chaotycznych. Doskonałym przykładem, ilustrującym znaczenie prowadzonych badań, jest nierozwiązany dotychczas problem, który ujawnia się w fizyce plazmy, a w szczególności w badaniach nad kontrolowaną syntezą jądrową [1]. W tym przypadku podstawowym problemem jest ściśnięcie wysoko-temperaturowej plazmy przez dostatecznie długi czas, który pozwoliłby na zajście reakcji syntezy. Zagadnienie ściśnięcia plazmy polega na wytworzeniu takiej konfiguracji linii pola magnetycznego, aby nie łączyły one wnętrza plazmy ze ściankami tokamaka [1]. W przypadku praktycznych urządzeń tego typu, ze względu na niedokładność cewek pola magnetycznego, nieuniknione asymetrie ścianek urządzenia oraz z powodu kształtu torusów i linii gęstości prądu płynącego w plazmie, symetria pola magnetycznego zostaje unicestwiona, co prowadzi do występowania zjawisk chaotycznych w takim układzie. Okazuje się, że olbrzymim problemem jest owa stabilizacja drgań chaotycznych linii pola, które mogą błędzić między wnętrzem plazmy, a ściankami tokamaka, co jest przyczyną gwałtownego przegrzewania się plazmy i utraty cząstek.

Kolejnym bardzo istotnym układem wykazującym cechy dynamiki chaotycznej jest stalowniczy piec łukowy [4, 21]. W szczególności w początkowym stadium roztapiania wsadu piec znajduje się w stanie chaotycznym, czego objawem jest ciągłość charakterystyk widmowych prądów pobieranych z sieci zasilającej. Jest to szczególnie niekorzystne zjawisko, ponieważ występowanie drgań subharmonicznych może być w wielu przypadkach niebezpieczne dla takich elementów jak maszyny synchroniczne oraz transformatory, a także elektrody pieca ze względu na powstawanie rezonansów mechanicznych, które mogą być przyczyną poważnych awarii w układzie zasilającym stalowniczy piec łukowy [4]. Ponadto drgania chaotyczne przebiegów napięć i prądów o niskiej częstotliwości, znacznie przekraczające dopuszczalne normy w rzeczywistych układach tego typu, negatywnie wpływają na pracę równoległe włączonych użytkowników.

Z uwagi na fakt, że chaos może pojawiać się tylko w układach nieliniowych, proces sterowania jest znacznie utrudniony. Obwody nieliniowe nie podlegają ani zasadzie proporcjonalności ani też zasadzie superpozycji, a co za tym idzie, nawet stosunkowo małe zmiany wymuszenia mogą powodować dramatyczne, a zarazem nieprzewidywalne efekty [2, 4, 6, 7, 11, 12, 19-27]. Spośród wielu metod bardzo istotną koncepcją sterowania układów chaotycznych okazała się metoda OGY [13], która została zaprezentowana w 1990 r. przez Otta, Grebogi'ego i Yorke'a. Metoda ta polega na niewielkich zmianach jednego z parametrów układu chaotycznego w celu stabilizacji niestabilnej orbity okresowej należącej do dziwnego atraktora. Zaletą tej koncepcji jest fakt, że w celu eliminacji niepożądanych drgań nie są wymagane wysokie nakłady energetyczne. Metoda ta oraz opracowana w 1995 r. przez Galiasa metoda minimum odległość [6], zainspirowały autora do opracowania nowych, dwupołożeniowych algorytmów stabilizacji orbit okresowych w układach chaotycznych [4].

Dwupołożeniowy algorytm stabilizacji orbit okresowych

Algorytmy stabilizacji niestabilnych orbit okresowych w wersji jednopunktowej, prezentowane w pracach [6, 11, 13] są trudne do realizacji w rzeczywistych układach. Wynika to z faktu, że parametr sterujący układem jest modyfikowany tylko raz w ciągu okresu stabilizowanej orbity, co może być niewystarczające do wysterowania trajektorii w obecności nawet niewielkich zakłóceń. Podobnie algorytmy wielopunktowe przedstawione w [6, 13] również mogą być

zawodne, zwłaszcza w przypadku sterowania złożonych układów chaotycznych w obecności znacznych zakłóceń i szumów. Kolejnym istotnym ograniczeniem omawianych metod jest modyfikacja tylko jednego parametru sterującego. Takie algorytmy mogą być stosowane do eliminacji drgań chaotycznych w układach wyższych rzędów tylko w przypadku, gdy punkt stały na przekroju Poincarégo, odpowiadający danej orbicie okresowej, posiada tylko jedną niestabilną wartość własną [13]. W przypadku większej liczby niestabilnych wartości własnych, konieczna jest możliwość modyfikacji więcej, niż jednego parametru sterującego w celu ustabilizowania określonej niestabilnej orbity, zanurzonej w dziwnym atraktorze.

Z tych powodów autor opracował efektywny algorytm dwupołożeniowy [4], bazując na metodzie minimum odległości opracowanej przez Galiasa [6], w którym możliwa jest modyfikacja wielu parametrów sterujących w każdej chwili próbkowania, a więc w zależności od implementacji parametry sterujące mogą być zmieniane nawet kilkadziesiąt tysięcy razy w ciągu okresu danej orbity zanurzonej w dziwnym atraktorze. Takie podejście pozwala na sterowanie złożonych układów chaotycznych w obecności silnych zakłóceń i szumów.

Nasze rozważania ograniczymy do rozpatrzenia autonomicznego układu nieliniowego, opisanego układem równań różniczkowych zwyczajnych n - tego rzędu, którego stan chwilowy zależy od k parametrów \mathbf{p} :

$$(1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{F}(x(t), \mathbf{p}),$$

gdzie \mathbf{F} jest ciągłym polem wektorowym, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^k$, przy czym $k \leq (n-1)$. Załóżmy, że dla wartości parametrów $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ orbita okresowa γ należy do dziwnego atraktora. Zakładamy ponadto, że niewielka dopuszczalna zmiana parametrów $\Delta \mathbf{p}_{max}$:

$$(2) \quad \mathbf{p}_0 - \Delta \mathbf{p}_{max} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}_{max}$$

nie prowadzi do zaniku atraktora oraz interesującej nas niestabilnej orbity okresowej. W przypadku sterowania multi-punktowego, nie ustalamy na stałe położenia hiperpłaszczyzn \sum_i uogólnionego odwzorowania Poincarégo, tylko w każdej chwili próbkowania dynamicznie określamy odwzorowanie, które punktom z jednej hiperpłaszczyzny przyporządkowuje punkty z kolejnej hiperpłaszczyzny. Zagadnienie sterowania polega więc na takim usytuowaniu hiperpłaszczyzny \sum_i , aby trajektoria fazowa układu chaotycznego przecinała ją transwersalnie w punkcie \mathbf{x}_{P_i} w konkretnej chwili próbkowania. Przez \mathbf{P}_i oznaczmy uogólnione odwzorowanie Poincarégo, zdefiniowane w pewnym otoczeniu punktu $\mathbf{x}_{P_{F_i}}$, przy czym odwzorowanie to zależy od k parametrów:

$$(3) \quad \mathbf{P}_i: \mathbf{R}^{(n-1)} \times \mathbf{R}^k \ni (\mathbf{x}_p, \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}_p, \mathbf{p}) \in \mathbf{R}^{(n-1)}.$$

Niech $\mathbf{x}_{P_{F_i}}$ będzie punktem stałym odwzorowania (3) dla wartości parametrów $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$:

$$(4) \quad \mathbf{P}_i(\mathbf{x}_{P_{F_i}}, \mathbf{p}_0) = \mathbf{x}_{P_{F_{i+1}}}.$$

Liniowa aproksymacja uogólnionego odwzorowania \mathbf{P}_i w otoczeniu punktu $(\mathbf{x}_{P_{F_i}}, \mathbf{p}_0)$ może być przedstawiona w następującej postaci:

$$(5) \quad \mathbf{P}_i(\mathbf{x}_p, \mathbf{p}) \approx \mathbf{P}_i(\mathbf{x}_{P_{F_i}}, \mathbf{p}_0) + \mathbf{J}_{P_i}(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{P_{F_i}}) + \mathbf{G}_i(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0),$$

gdzie $\mathbf{x}_p \in \mathbf{R}^{(n-1)}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^k$, $\mathbf{J}_{P_i} \in \mathbf{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, $\mathbf{G}_i \in \mathbf{R}^{(n-1) \times k}$. Współczynniki liniowej aproksymacji (5) można wyznaczyć z dużą dokładnością, wykorzystując procedury całkowania numerycznego [4]. Bardzo dobre rezultaty uzyskaliśmy w

wyniku zastosowania algorytmów Rungego-Kutty drugiego rzędu. W rozpatrywanym przypadku $\mathbf{J}_{P_i} = \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{x}_p}(\mathbf{x}_{P_{F_i}}, \mathbf{p}_0)$ jest macierzą Jacobiego uogólnionego odwzorowania Poincarégo w punkcie $(\mathbf{x}_{P_{F_i}}, \mathbf{p}_0)$:

$$(6) \quad \mathbf{J}_{P_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_{p_1}} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial x_{p_{i-1}}} & \frac{\partial P_1}{\partial x_{p_{i+1}}} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial x_{p_n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_{i-1}}{\partial x_{p_1}} & \dots & \frac{\partial P_{i-1}}{\partial x_{p_{i-1}}} & \frac{\partial P_{i-1}}{\partial x_{p_{i+1}}} & \dots & \frac{\partial P_{i-1}}{\partial x_{p_n}} \\ \frac{\partial P_{i+1}}{\partial x_{p_1}} & \dots & \frac{\partial P_{i+1}}{\partial x_{p_{i-1}}} & \frac{\partial P_{i+1}}{\partial x_{p_{i+1}}} & \dots & \frac{\partial P_{i+1}}{\partial x_{p_n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_{p_1}} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial x_{p_{i-1}}} & \frac{\partial P_n}{\partial x_{p_{i+1}}} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial x_{p_n}} \end{bmatrix},$$

natomiast $\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}_{P_{F_i}}, \mathbf{p}_0)$ jest macierzą pochodnych cząstkowych uogólnionego odwzorowania względem zbioru parametrów \mathbf{p} :

$$(7) \quad \mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial p_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_{i-1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P_{i-1}}{\partial p_k} \\ \frac{\partial P_{i+1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P_{i+1}}{\partial p_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial p_k} \end{bmatrix}.$$

Dzięki zastosowaniu odwzorowania Poincarégo redukujemy wymiar przestrzeni stanu o 1, przy czym należy pamiętać, że poszczególne hiperpłaszczyzny uogólnionego odwzorowania (3) są usytuowane wzdłuż kierunku x_i . Zgodnie z ideą metody minimum odległości poszukujemy takiej wartości parametrów $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_k]^T$, aby zminimalizować odległość śladu trajektorii od punktu stałego na przekroju uogólnionego odwzorowania Poincarégo w każdej chwili próbkowania:

$$(8) \quad d(\mathbf{P}_i(\mathbf{x}_p, \mathbf{p}), \mathbf{x}_{P_{F_{i+1}}}) = \min.$$

Korzystając z linearyzacji uogólnionego odwzorowania (5) oraz z definicji pseudoinwersji macierzy [28], wartość parametrów sterujących \mathbf{p} dla której:

$$(9) \quad \left\| \mathbf{J}_{P_i}(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{P_{F_i}}) + \mathbf{G}_i(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \right\|$$

osiąga wartość minimalną, wynosi:

$$(10) \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - (\mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i)^{-1} \mathbf{G}_i^T \mathbf{J}_{P_i}(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{P_{F_i}}),$$

gdzie $\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{P_{F_i}} \in \mathbf{R}^{(n-1)}$, $\mathbf{p}, \mathbf{p}_0 \in \mathbf{R}^k$, $\mathbf{J}_{P_i} \in \mathbf{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, $\mathbf{G}_i \in \mathbf{R}^{(n-1) \times k}$, przy czym zakładamy, że rząd macierzy \mathbf{G}_i wynosi k .

Zależność (10) określa wartość parametrów sterujących, które mogą przyjmować dowolną wartość spośród ustalonego zakresu (2). W przypadku sterowania rzeczywistych układów, płynna zmiana parametrów może być trudna do realizacji. W celu rozwiązania tego problemu można zastosować koncepcję sterowania dwupołożeniowego, w której poszczególne parametry sterujące ustawione są na jedną z dwóch dopuszczalnych wartości. Załóżmy, że konkretny parametr może przyjmować tylko dwie wartości p_{1j} lub p_{2j} , ($j = 1, 2, \dots, k$), z tym, że $p_{1j} < p_{2j}$. Wartość nominalna j - ego parametru, dla której istnieje interesująca nas niestabilna orbita okresowa, wynosi:

$$(11) \quad p_{0j} = \frac{p_{1j} + p_{2j}}{2}.$$

Zakładamy, że różnica parametru Δ_{p_j} jest na tyle mała, że dla wartości parametru sterującego $p_j = p_{1j}$ lub $p_j = p_{2j}$ dziwny atraktor danego układu chaotycznego oraz interesująca nas niestabilna orbita okresowa, podlegająca stabilizacji, nie znikają, przy czym:

$$(12) \quad \Delta_{p_j} = \frac{p_{2j} - p_{1j}}{2}.$$

W celu ustabilizowania dowolnej niestabilnej orbity okresowej, zanurzonej w dziwnym atraktorze, parametry sterujące, zgodnie z koncepcją metody multipunktowej, modyfikujemy w każdej chwili próbkowania według poniższego wzoru:

$$(13) \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \text{diag}(\text{sgn}(\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_0))\Delta_{\mathbf{p}},$$

gdzie $\mathbf{p}, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_c, \Delta_{\mathbf{p}} \in \mathbf{R}^k$, $\Delta_{\mathbf{p}} = [\Delta_{p_1} \ \Delta_{p_2} \ \dots \ \Delta_{p_k}]^T$, natomiast \mathbf{p}_c jest wektorem parametrów, obliczonych według zależności (10). Z zależności (13) wynika, że j – ta wartość parametru sterującego wynosi $p_j = p_{1j}$ jeżeli $p_{c_j} < p_{0_j}$ lub $p_j = p_{2j}$ w przypadku, gdy $p_{c_j} \geq p_{0_j}$. W wyniku zastosowania sterowania dwupołożeniowego, nie jesteśmy w stanie zapewnić zbieżności trajektorii fazowej do orbity okresowej w kolejnych iteracjach uogólnionego odwzorowania (3), jednak taka koncepcja eliminacji drgań chaotycznych jest bardzo efektywna, ponieważ poprzez wybór poszczególnych wartości parametrów sterujących \mathbf{p} zawsze zmuszamy trajektorię układu do ruchu w kierunku stabilizowanej orbity okresowej.

W rozpatrywanej metodzie dwupołożeniowej, w każdej chwili próbkowania dokonujemy stosownej modyfikacji parametrów zgodnie z (13) w przypadku, gdy odległość trajektorii fazowej od punktu stałego $\mathbf{x}_{p_{Fi}}$ na przekroju uogólnionego odwzorowania Poincarégo jest mniejsza od założonej wartości d_{\max} , w przeciwnym przypadku ustawiamy wartość parametrów na wartość nominalną \mathbf{p}_0 i czekamy ze zmianą parametrów do momentu, gdy trajektorja ponownie przejdzie dostatecznie blisko jednego z punktów stałych, rozmieszczonych na hiperpłaszczyźnie Σ_i , umiejscowionej w dowolnym obszarze przestrzeni fazowej w obrębie danej orbity okresowej.

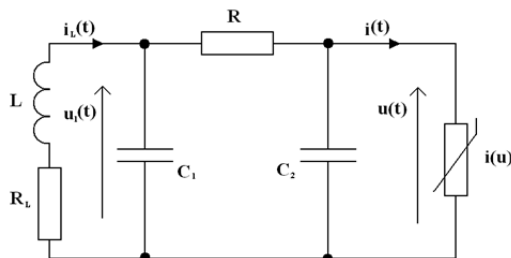
Eliminacja drgań chaotycznych z wykorzystaniem przedstawionego algorytmu dwupołożeniowego jest możliwa do realizacji w przypadku, gdy dysponujemy odpowiednim opisem analitycznym położenia niestabilnej orbity okresowej w przestrzeni fazowej. Opis ten jest niezbędny do wyznaczenia położenia punktów stałych $\mathbf{x}_{p_{Fi}}$ na przekrojach uogólnionego odwzorowania Poincarégo w całej przestrzeni atraktora. Daną orbitę należy podzielić w taki sposób, aby trajektorja fazowa przebiegała transwersalnie poszczególne hiperpłaszczyzny odwzorowania (3). Zainteresowanych czytelników odsyłamy do lektury pracy [4].

Ze względu na bardzo niewielkie odległości pomiędzy poszczególnymi hiperpłaszczyznami odwzorowania \mathbf{P}_i , liniowa aproksymacja (5) jest bardzo dokładna w znacznie większej odległości trajektorii od danego punktu stałego $\mathbf{x}_{p_{Fi}}$, niż ma to miejsce w przypadku metod wielopunktowych, w których zmiana parametru odbywa się kilkanaście razy w ciągu okresu stabilizowanej orbity [6, 13]. Jest to niezwykle korzystna własność przedstawionego algorytmu dwupołożeniowego, ponieważ możliwe jest znaczne zwiększenie parametru d_{\max} , który wpływa na moment rozpoczęcia stabilizacji. Takie podejście znacznie skraca przejściowy proces, kiedy układ jest niesterowany, a co za tym idzie, układ krócej znajduje się w niepożądanym stanie chaotycznym. Ponadto, możliwość zwiększenia parametru d_{\max} ma ogromne znaczenie w przypadku

stabilizacji wybranej orbity w obecności silnych zakłóceń i szumów. Bardzo istotne jest również to, że okres, kiedy trajektorja jest niekontrolowana, jest skrócony do minimum, ponieważ zmiana parametrów odbywa się w każdej chwili próbkowania. Warty podkreślenia jest również fakt, że możliwość zmiany wielu parametrów układu, pozwala na zastosowanie takiego sterowania dla dowolnie złożonych układów chaotycznych, które mogą charakteryzować się tym, że poszczególne punkty stałe na przekrojach uogólnionego odwzorowania Poincarégo posiadają więcej niż jedną niestabilną wartość własną.

Dziwny atraktor obwodu Chua'y

Zaprezentowany algorytm dwupołożeniowy przetestujemy, wykorzystując obwód Chua'y [2, 4], który ze względu na swoje właściwości, jest niezwykle popularnym przedmiotem badań ośrodków naukowych, zajmujących się problematyką teorii chaosu. Obwód ten pomimo niezbyt skomplikowanej struktury charakteryzuje się bardzo interesującymi zachowaniami, które są uzależnione od doboru odpowiednich parametrów elementów liniowych oraz współczynników charakterystyki nieliniowego opornika, wywołanymi niezerowymi warunkami początkowymi. Zdecydowana większość badań obwodu Chua'y przeprowadzana jest z wykorzystaniem odcinkowo-liniowej charakterystyki elementu nieliniowego, przy czym, jak wykazały badania, jest ona reprezentatywna dla innych nieliniowych charakterystyk, które mogą być gładkie, a co za tym idzie różniczkowalne w całym zakresie napięcia [2]. Warty podkreślenia jest fakt, że rezultaty otrzymywane podczas symulacji obwodu Chua'y są bardzo zbliżone do wyników uzyskiwanych w oparciu o fizycznie zrealizowany układ eksperymentalny. Przy odpowiednim doborze parametrów można zaobserwować w tym obwodzie pełną gamę zachowań, które są charakterystyczne dla szerokiej klasy nieliniowych układów dynamicznych, a mianowicie: asymptotyczną stabilność stanu równowagi w punkcie, bifurkacje, drgania okresowe i wielookresowe oraz, rozważane w niniejszej pracy, drgania chaotyczne.



Rys.1. Struktura obwodu Chua'y

Rysunek 1 przedstawia strukturę obwodu Chua'y. Jest to układ 3 – go rzędu, który oprócz elementów liniowych zawiera jeden opornik nieliniowy. W naszych rozważaniach wykorzystamy element nieliniowy o gładkiej charakterystyce. Stan chwilowy rozpatrywanego obwodu opisuje poniższy układ równań różniczkowych:

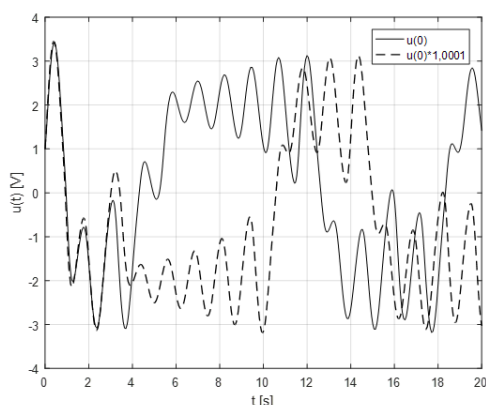
$$(14) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{C_2} \left(\frac{u_1 - u}{R} - i(u) \right) \\ \frac{du_1}{dt} = \frac{1}{C_1} \left(\frac{u - u_1}{R} + i_L \right) \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} (u_1 + R_L \cdot i_L) \end{cases},$$

gdzie charakterystykę prądowo-napięciową opornika nieliniowego opisuje poniższa zależność:

$$(15) \quad i(u) = G_1 u + v(G_2 - G_1) \operatorname{tgh}\left(\frac{u}{v}\right), \quad |G_1| < |G_2|.$$

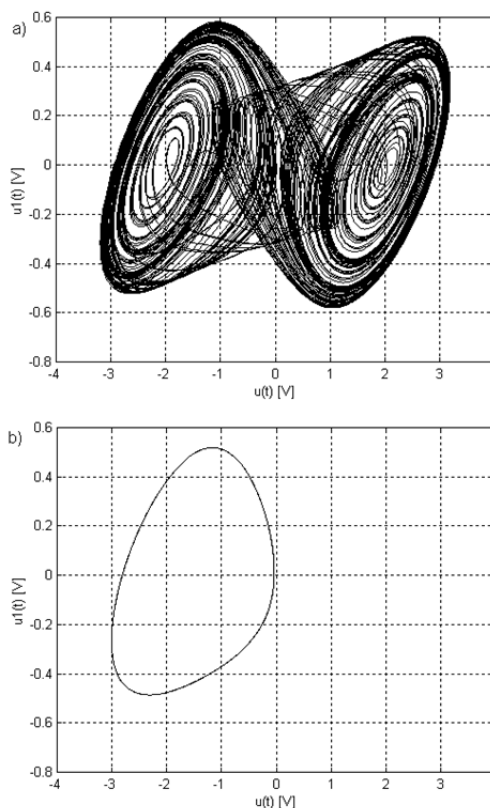
W celu weryfikacji skuteczności opracowanego algorytmu stabilizacji niestabilnych orbit okresowych przeprowadziliśmy szereg eksperymentów numerycznych z wykorzystaniem pakietu MATLAB. Analizę drgań w obwodzie Chua'y przeprowadziliśmy dla następującego zbioru parametrów: $C_1 = 1000\text{mF}$, $C_2 = 63\text{mF}$, $L = 28\text{mH}$, $R = 1\Omega$, $R_L = 0$, $G_1 = -0,7\text{S}$, $G_2 = -1,34\text{S}$, $v = 1\text{V}$.

Charakterystyczną cechą układów chaotycznych jest silna wrażliwość ich odpowiedzi na zmiany warunków początkowych. Jeśli w danym układzie zostaną ustalone dowolnie bliskie wartości określające warunki początkowe, to trajektorie fazowe, które rozpoczynają się z takich warunków z upływem czasu znaczenie się od siebie odseparują, co w praktyce oznacza, że owe trajektorie staną się nieskorelowane. Ta niezwykle charakterystyczna cecha układów chaotycznych zależy od wykładników Lapunowa [1, 2]. Dla ujemnego wykładnika trajektoria układu jest przyciągająca, natomiast dla dodatniego wykładnika Lapunowa trajektoria jest odpychająca, czyli wrażliwa na warunki początkowe. W praktyce oznacza to, że nieliniowy układ dynamiczny, który znajduje się w stanie chaotycznym jest nieprzewidywalny w dłuższym okresie czasu. Ilustracja tego zjawiska przedstawiona jest na rysunku 2, na którym wykreślone są przebiegi napięcia panującego na kondensatorze C_2 , wyznaczone przy bardzo niewielkiej zmianie warunków początkowych. Po upływie 3,5 s otrzymane przebiegi stają się nieskorelowane.



Rys.2. Wrażliwość układu Chua'y na warunki początkowe

Dla układu Chua'y charakterystyczne są dwa typy dziwnych atraktorów, atraktor typu Rösslera oraz atraktor dwukłębkowy [2]. Cechą charakterystyczną dziwnych atraktorów jest struktura fraktalna. Wyrażają one naturalną zdolność układów dynamicznych do samoorganizowania się w taki sposób, że ich trajektorie fazowe wypełniają przestrzeń fazową mniej więcej równomiernie, przy czym w różnych przedziałach czasu pozostawanie ich w określonych obszarach atraktora może być różne. Rysunek 3a przedstawia wspomniany atraktor dwukłębkowy, uzyskany przy niezerowych warunkach początkowych. Należy podkreślić, że taki atraktor składa się z nieskończenie wielu niestabilnych orbit okresowych. Na rysunku 3b przedstawiona jest interesująca nas niestabilna orbita okresowa, będąca celem sterowania. Prezentowana orbita została wyznaczona na podstawie danych eksperymentalnych metodą bliskich powrotów [4, 6]. W celu przyspieszenia obliczeń wykorzystywaliśmy odwzorowanie Poincarégo. Dokładne położenie rozpatrywanej orbity zostało ustalone na podstawie usytuowania orbit pseudo okresowych jej odpowiadających.

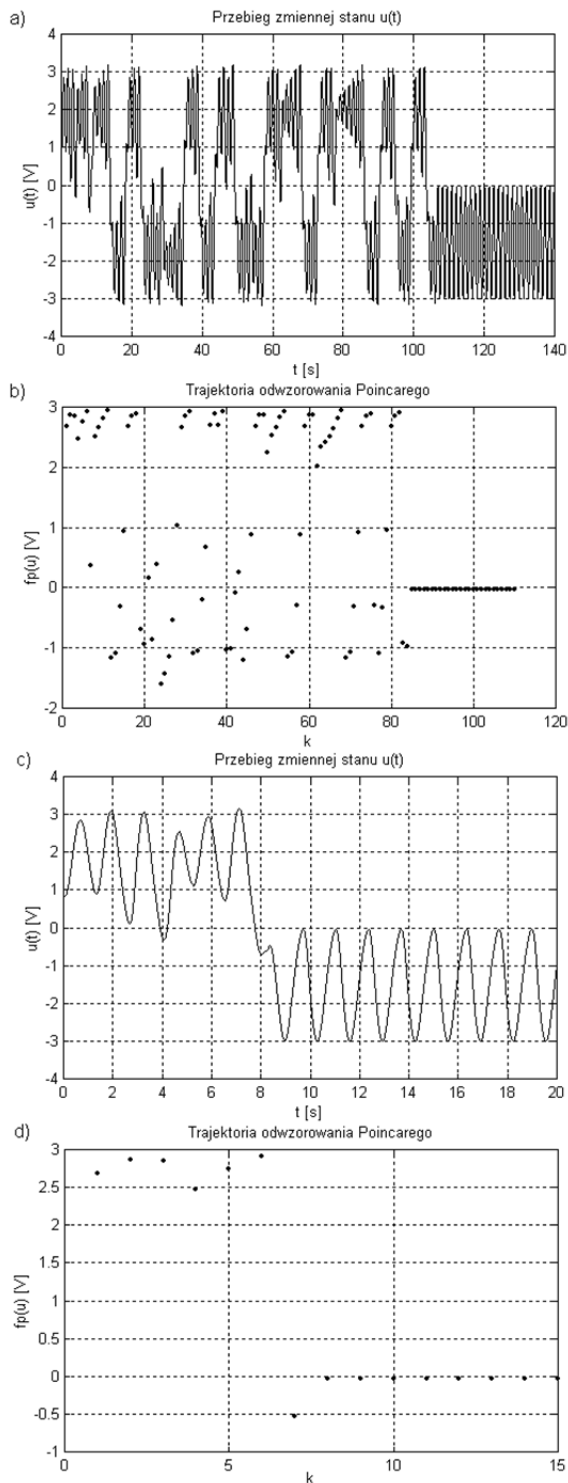


Rys. 3. Portret fazowy układu Chua'y przedstawiający: a) dziwny atraktor dwukłębkowy; b) niestabilną orbitę okresową zanurzoną w atraktorze

Stabilizacja niestabilnej orbity okresowej

Eliminacja drgań chaotycznych w układzie nieliniowym, przy wykorzystaniu opracowanej metody dwupołożeniowej, polega na stabilizacji wybranej orbity okresowej poprzez niewielkie zmiany wybranych parametrów sterujących w każdej chwili próbkowania. Proces sterowania można rozpocząć w momencie, gdy trajektoria przejdzie dostatecznie blisko stabilizowanej orbity. Na rysunku 4a przedstawiony jest przebieg napięcia $u(t)$ uzyskany dla wartości $d_{\max} = 0,01$. Trajektoria fazowa układu po upływie 109 s zbliżyła się dostatecznie blisko orbity okresowej, co pozwoliło na ustabilizowanie układu (rys. 4b). W przypadku zwiększenia parametru d_{\max} do wartości 0,1, rozpoczęcie procedury sterowania było możliwe po upływie 9 s (rys. 4c – 4d). Uzyskane rezultaty dobitnie uwiadcniają zalety opracowanego algorytmu. Wysoka dokładność liniowej aproksymacji (5) w dużym otoczeniu orbity okresowej pozwala na znaczne skrócenie momentu rozpoczęcia sterowania. W przypadku braku zakłóceń w układzie pomyślna stabilizacja jest możliwa nawet dla bardzo małego sygnału sterującego $\Delta_p = 0,0001p_0$. Dzięki temu, że parametry sterujące modyfikowane są w każdej chwili próbkowania, proces sterowania może być pomyślnie realizowany przy znacznie większej zmianie parametrów ($\Delta_p > 0,1p_0$), co jest niezwykle istotne w trakcie sterowania złożonych układów chaotycznych w obecności silnych zakłóceń i szumów.

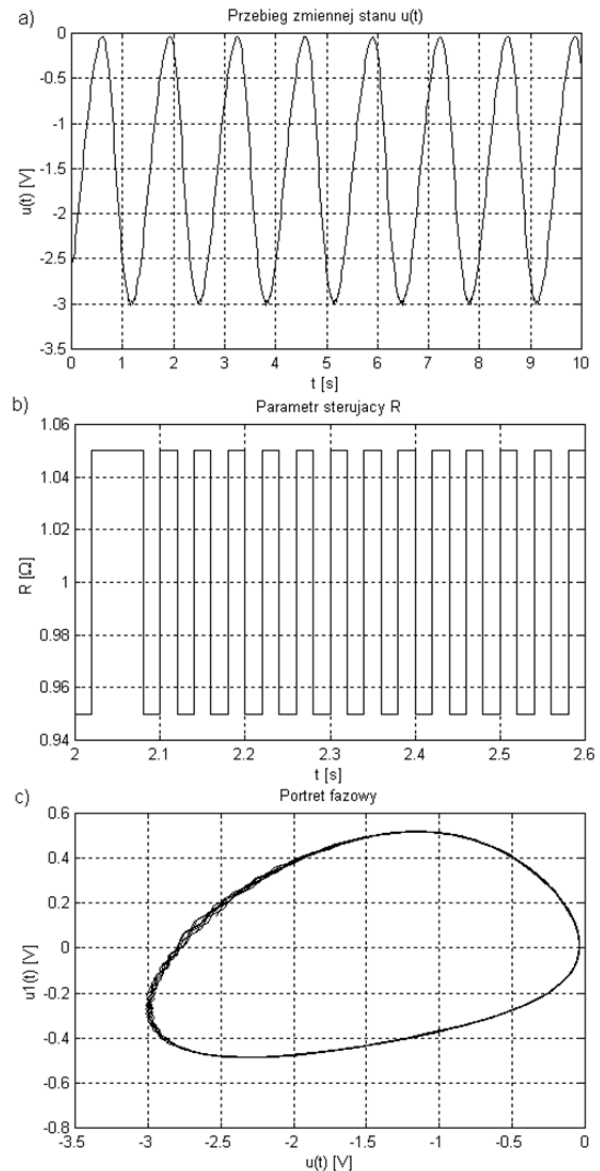
Na rysunku 5 przedstawione są rezultaty sterowania układu Chua'y, uzyskane dla kroku próbkowania wynoszącego $h = 0,02$ s. Modyfikacji podlegał jeden parametr R ($\Delta_p = 0,05p_0$). Niewielkie rozbieżności na portrecie fazowym wynikają z zastosowania metody dwupołożeniowej (rys. 5c). Przy zmniejszeniu kroku próbkowania do poziomu $h = 0,001$ s, trajektoria fazowa układu praktycznie pokrywałaby się ze stabilizowaną orbitą.



Rys.4. Stabilizacja krótkiej orbity okresowej, zanurzonej w dziwnym atraktorze: a), b) dla $d_{\max} = 0,01$; c), d) dla $d_{\max} = 0,1$

Rysunek 6a przedstawia wyniki stabilizacji orbity okresowej w obecności silnych zakłóceń [4], przy modyfikacji parametru R z krokiem próbkowania wynoszącym $h = 0,001s$. Opracowany algorytm pozwala na modyfikację wielu parametrów sterujących, co jest niezwykle korzystne w przypadku sterowania złożonych układów chaotycznych. Znacznie lepsze rezultaty eliminacji drgań chaotycznych uzyskaliśmy przy zmianach dwóch parametrów $\mathbf{p} = [R \ C_1]^T$ (rys.6b). Zwiększenie liczby parametrów sterujących korzystnie wpływa na jakość stabilizacji. Co ciekawe, jeszcze lepsze rezultaty możliwe

są do uzyskania przy redukcji kroku próbkowania. Częstsze zmiany parametrów sterujących mają ogromne znaczenie w przypadku stabilizacji wybranej niestabilnej orbity okresowej w obecności silnego szumu w danym układzie. Ponadto możliwość zmian sygnału sterującego w każdej chwili próbkowania pozwala na zwiększenie dopuszczalnej wartości Δ_p w rozpatrywanym algorytmie dwupołożeniowym, co umożliwia stabilizację realnych układów chaotycznych.

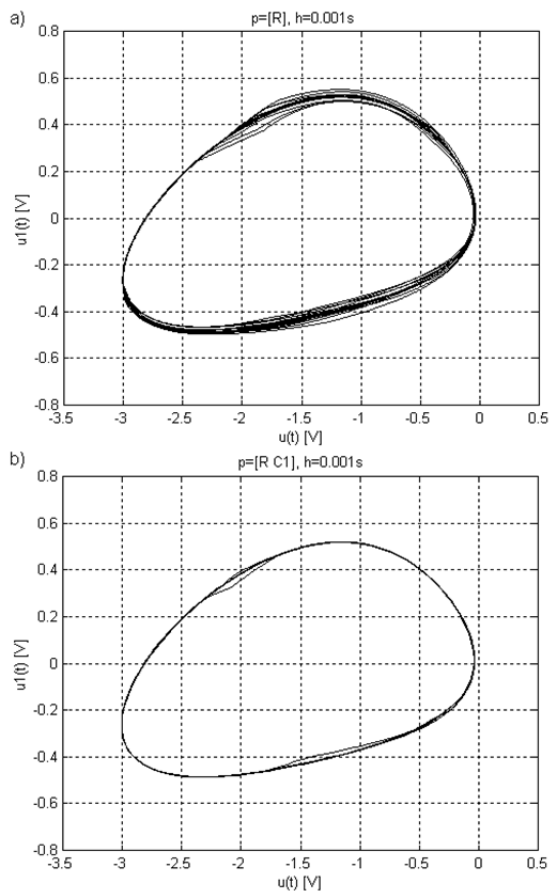


Rys.5. Rezultaty stabilizacji niestabilnej orbity okresowej dla $h = 0,02s$: a) przebieg napięcia $u(t)$; b) wykres zmian parametru sterującego; c) portret fazowy obwodu Chua'y

Podsumowanie

Opracowany algorytm dwupołożeniowy, dzięki możliwości zmian kilku parametrów sterujących w każdej chwili próbkowania, okazał się bardzo efektywny. Jego zaletą jest znacznie prostsza implementacja praktyczna, ponieważ poszczególne parametry sterujące mogą być ustawione tylko na jedną z dwóch wartości. Dzięki możliwości częstej modyfikacji sygnału sterującego, liniowa aproksymacja odwzorowania Poincarégo jest bardzo dokładna w dużym otoczeniu orbity okresowej, co umożliwia stabilizację wybranych orbit okresowych w obecności silnych zakłóceń i szumów. Ponadto możliwość

zmian wielu parametrów, pozwala na eliminację niepożądanych drgań w dowolnie złożonych układach chaotycznych.



Rys.6. Stabilizacja drgań w układzie Chua'y w obecności silnych zakłóceń: a) $\mathbf{p} = R$; b) $\mathbf{p} = [R C_1]^T$

Autorzy: dr inż. Radosław Basiński, Politechnika Warszawska, Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Systemów Informacyjno-Pomiarowych, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa, E-mail: radoslaw.basinski@ee.pw.edu.pl; dr hab. inż. Krzysztof Siwek, prof. PW, Politechnika Warszawska, Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Systemów Informacyjno-Pomiarowych, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa, E-mail: Krzysztof.Siwiek@ee.pw.edu.pl.

LITERATURA

- [1] Ott E., Chaos in Dynamical Systems, Cambridge Univ. Press, 1993
- [2] Trzaska Z., Drgania w obwodzie Chua'y jako kompendium zjawisk chaotycznych, *Przegląd elektrotechniczny*, nr 6/2005, 25-32
- [3] Trzaska Z., Impact and chaotic phenomena in nonlinear nonsmooth electrical dynamical systems, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 4/2015, 77-85
- [4] Basiński R., Stabilizacja orbit okresowych w układach podatnych na chaos, *Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska*, 2019
- [5] Abedini M., Vatankhah R., Assadian N., Stabilizing chaotic system on periodic orbits using multi-interval and modern optimal control strategies, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, vol. 17, 3832-3842
- [6] Galias Z., New method for stabilization of unstable periodic orbits in chaotic systems, *Int. J. Bifurcation Chaos*, 1995, vol. 5(1), 281-295

- [7] Ghambar A., Balochian S., Chaos control of permanent magnet synchronous generator via sliding mode controller, *Majlesi Journal of Electrical Engineering*, 2019, vol. 13(1), 1-5
- [8] Hojjat K., Salarieh H., A new approach to extreme event prediction and mitigation via Markov-model-based chaos control, *Chaos, Solitons and Fractals*, vol.136, 2020
- [9] Irfan A., Qamar D., Bifurcation analysis and chaos control in discrete-time system of three competing species, *Arabian Journal of Mathematics*, 2019, vol. 8(1), 1-14
- [10] Jiang H., Jia M., Chaos control for multi-scroll chaotic attractors generated by introducing a bipolar sigmoid function series, *Indian Journal of Physics*, 2020, vol. 94(6), 851-861
- [11] Ogorzałek M.J., Chaos Control Techniques, *Wiley Encyclopedia of Electrical Engineering*, 2007
- [12] Ogorzałek M.J., Chaos control: How to avoid chaos or take advantage of it, *Journal of the Franklin Institute*, 1994, vol. 331(6), 681-704
- [13] Ott E., Grebogi C., Yorke J.A., Controlling chaotic dynamical systems, *Published in: Chaos-Soviet-American Perspectives on Nonlinear Science, D.K. Campbell ed., American Institute of Physics*, New York, 1990, 153-172
- [14] Paula A.S., Savi M.A., A multiparameter chaos control method on OGY approach, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, vol. 40(3), 1376-1390
- [15] Osowski S., Siwek K., Local Dynamic Integration of Ensemble in Prediction of Time Series, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 2019, vol. 67(3), 517-525
- [16] Siwek K., Osowski S., Data Mining Methods for Prediction of Air Pollution, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2016, vol. 26(2), 467-478
- [17] Siwek K., Osowski S., Improving the Accuracy of Prediction of PM10 Pollution by the Wavelet Transformation and an Ensemble of Neural Predictors, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2012, vol. 25(6), 1246-1258
- [18] Ciechulski T., Osowski S., Prognozowanie zapotrzebowania mocy w KSE z horyzontem dobowym przy zastosowaniu zespołu sieci neuronowych, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 9/2018, 108-112
- [19] Basiński K., Ufnalski B., Grzesiak L., Particle swarm based repetitive spline compensator for servo drives, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 2/2017, 181-187
- [20] Basiński R., Wpływ pojemności dodatkowego kondensatora na eliminowanie rozbłysków lampy fluorescencyjnej, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 8/2008, 228-231
- [21] Gała M., Rak J., Jagiela K., Praca pieca łukowego AC w systemie elektroenergetycznym, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 12/2019, 246-251
- [22] Kamiński M., Implementacja nieliniowego obserwatora neuronowego dla napędu elektrycznego o złożonej części mechanicznej, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 11/2019, 208-214
- [23] Mitura A., Kecik K., Augustyniak M., Dynamics and Energy Harvesting Control of an Autoparametric Pendulum-Like System, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 7/2018, 82-85
- [24] Szczebiot R., Jordan A., Criterion for transient behaviour in a nonlinear Duffing oscillator, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 4/2019, 196-199
- [25] Trzaska Z., Dynamical processes in sequential-bipolar pulse sources supplying nonlinear loads, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 3/2014, 147-152
- [26] Trzaska Z., Study of Mixed-mode Oscillations in a Nonlinear Cardiovascular System, *Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 100(3), 2635-2656
- [27] Wciślik M., Strzabala P., Analysis of interactions in the circuit of the power system with nonlinear load and LC passive filter, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 3/2020, 55-58
- [28] Osowski S., Cichocki A., Siwek K., MATLAB w zastosowaniu do obliczeń obwodowych i przetwarzania sygnałów, *Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej*, Warszawa 2006