

Teoretyczne i przydatne eksperymentalnie modele szumów

Streszczenie. W artykule zwrócono uwagę na potrzeby badawcze w określeniu przydatnych teoretycznie i praktycznie modeli sygnałów stochastycznych. Przedstawiono modele teoretyczne mało przydatne praktycznie: szum biały i szum biały po przejściu przez układ inercyjny. Opisano modele teoretyczne szumów dolnopasmowych przydatne praktycznie. Podano przykładowe charakterystyki teoretyczne i eksperymentalne szumów.

Abstract. The article brings to attention the research needs in determining theoretically and practically useful models of stochastic signals. It presents theoretical models of little practical use: white noise and white noise after passing through an inertial system. Practically useful theoretical models of low-band noises were described. Examples of theoretical and experimental characteristics of noises were provided. (**Theoretical and experimental useful models of noises**).

Słowa kluczowe: szum biały, szum dolnopasmowy, funkcja autokorelacji, gęstość widmowa mocy.

Keywords: white noise, low-band noise, autocorrelation function, power spectral density.

Wprowadzenie

Określenie wpływu przypadkowych wymuszeń na przebieg różnych procesów fizycznych staje się jednym z podstawowych problemów w wielu dziedzinach nauki i techniki. Biorąc pod uwagę coraz większą złożoność rozpatrywanych zjawisk, teoretyczne określenie wpływu wymuszeń stochastycznych jest trudne, a często niemożliwe, jedyną zaś drogą rozwiązania problemu staje się eksperymentalne badanie zjawiska. Ważnym zagadnieniem badawczym jest określenie jednocześnie przydatnych teoretycznie i praktycznie modeli sygnałów stochastycznych [1-3].

Modele eksperymentalne powinny uwzględniać zarówno eksperymenty bierne (pomiar i analizę sygnałów w zjawiskach fizycznych) jak i generowanie takich sygnałów dla celów eksperymentów czynnych oraz symulacji [4-9].

W opisach i analizach teoretycznych często występują modele szumu białego, którego wartości są nieskorelowane i szumu dolnopasmowego o skorelowaniu wykładniczym. Takie modele okazują się mało przydatne jako odniesienia do wyników praktycznych.

Praktyczne zadania przetwarzania sygnałów losowych dotyczą sygnałów nie będących teoretycznymi szumami białymi. Sygnały rzeczywiste, najczęściej dolnopasmowe, w praktyce powstają po przejściu szumów szerokopasmowych przez układy inercyjne. Przy przechodzeniu przez układy inercyjne sygnałów losowych następuje normalizacja ich funkcji gęstości prawdopodobieństwa [10-15].

W artykule przedstawiono modele teoretyczne i eksperymentalne szumów. Omówiono przydatne eksperymentalne modele szumów białych pasmowych i szumów skorelowanych wykładniczo. Dla szumów dolnopasmowych o rozkładzie normalnym wyznaczono estymaty funkcji autokorelacji techniką warunkowego uśredniania.

Modele teoretyczne [1-3]

Szum biały

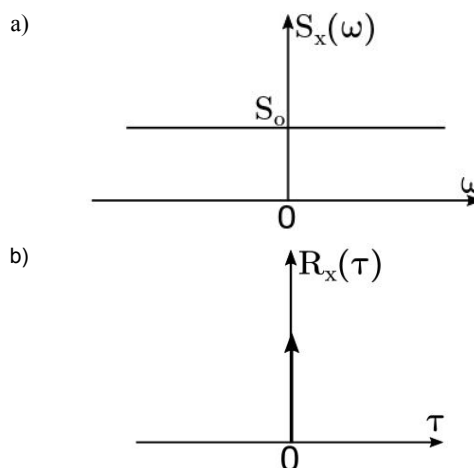
Szum biały jest wyidealizowanym procesem stochastycznym, który ma stałą wartość gęstości widmowej mocy dla wszystkich wartości ω :

$$(1) \quad S_x(\omega) = S_0,$$

oraz funkcję autokorelacji – deltę Diraca $\delta(t)$ z intensywnością S_0

$$(2) \quad R_x(\tau) = S_0 \cdot \delta(\tau).$$

Charakterystyki $S_x(\omega)$ i $R_x(\tau)$ szumu białego przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Charakterystyki szumu białego: a) dwustronna gęstość widmowa mocy $S_x(\omega)$; b) funkcja autokorelacji $R_x(\tau)$.

Proste modele matematyczne charakterystyk mogą, być przydatne przy teoretycznych analizach systemów liniowych szczególnie w sytuacjach kiedy szerokość gęstości widmowej mocy szumu wejściowego jest znacznie większa od szerokości pasma przenoszenia systemu.

Podane wyrażeniami (1) i (2) określenia szumu białego odnoszą się tylko do dziedzin częstotliwości i czasu i milcząco traktują dziedzinę wartości amplitudowych. W ogólnym rozumieniu funkcja gęstości prawdopodobieństwa szumu białego nie istnieje. W warunkach rzeczywistych dostatecznie bliskie czasowo wartości sygnałów są zawsze zależne a ich funkcje $R_x(\tau)$ są różne od $\delta(\tau)$. Model i wartości skorelowania sygnałów mają wpływ na ich charakterystyki statystyczne.

Wartość średniokwadratowa szumu białego jest równa powierzchni pod funkcją $S_x(\omega)$ oraz wartości $R_x(0)$, które to wartości nie są skończone, tak jak dla realnych procesów fizycznych. Szum biały jest modelem abstrakcyjnym, nie realizowanym w rzeczywistych warunkach, mało przydatnym w analizach wyników eksperymentalnych.

Szum biały po przejściu przez układ inercyjny

Szum biały z gęstością widmową S_0 po przejściu przez układ inercyjny pierwszego rzędu o stałej czasowej $T = \frac{1}{\alpha}$ uzyskuje dwustronną gęstość widmową mocy:

$$(3) \quad S_x(\omega) = S_0 \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2 \cdot \sigma_x^2 \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2},$$

gdzie: $\sigma_x^2 = \frac{S_0}{2} \alpha$ - wariancja szumu na wyjściu układu inercyjnego.

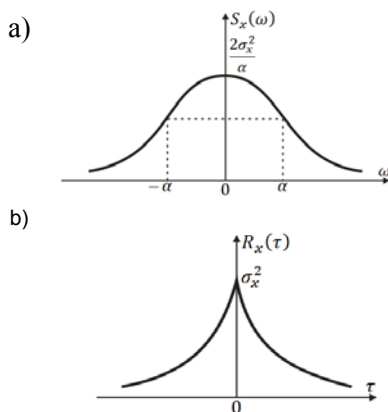
Odpowiadająca jej wykładniczo funkcja autokorelacji $R_x(\tau)$ z interwałem korelacji $\tau_k = T$ opisana jest wyrażeniem:

$$(4) \quad R_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho_x(\tau) = \frac{S_0}{2} \alpha \cdot e^{-\alpha|\tau|},$$

gdzie: $\rho_x(\tau)$ – unormowana funkcja autokorelacji.

W granicy przy $\alpha \rightarrow \infty$ funkcja autokorelacji (4) przybliża się do delty Diraca.

Przebiegi i zmienność funkcji $S_x(\omega)$ i $R_x(\tau)$ ilustruje rysunek 2.



Rys. 2. Charakterystyki: dwustronnej gęstości widmowej mocy $S_x(\omega)$ (a) i funkcji autokorelacji $R_x(\tau)$ (b)

Model szumu z charakterystykami (3) i (4) jest przydatny jako prosty model teoretyczny, którego zaletą jest łagodny przebieg funkcji $S_x(\omega)$. Idealizacją w tym modelu jest oddziaływanie teoretycznym szumem białym. Istotnym ograniczeniem zastosowań tego modelu w obliczeniach i praktyce jest brak skończonej wartości pochodnej funkcji autokorelacji dla $\tau=0$. Szumy, których autokorelacja ma taką cechę nazywają się i są nieróżniczkowalne. Powoduje to trudności w analizach eksperymentalnych i obliczeniach, szczególnie w dziedzinie wartości np. przy określeniu średniej liczby przecięć poziomu $x=x_p$ z zadanyim znakiem pochodnej w jednostce czasu dla stacjonarnego normalnego procesu z zerową wartością średnią:

$$(5) \quad \lambda_1(x_p) = \frac{\sqrt{-\rho_x''(0)}}{2\pi} \cdot e^{-\frac{x_p^2}{2 \cdot \sigma_x^2}}$$

$$\text{gdzie: } \rho_x''(0) = \left. \frac{d^2 \rho_x(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}$$

Dla modelu funkcji autokorelacji (4) wartość λ_1 jest nieskończona.

Modele teoretyczne przydatne eksperymentalnie [10-15] Szumy białe pasmowe

Szumy wytwarzane i przetwarzane w układach fizycznych mają ograniczone pasma częstotliwości. Modele teoretyczne charakterystyk tych szumów są przydatne w ocenach porównawczych wyników eksperymentalnych.

W literaturze występuje model teoretyczny gęstości widmowej $S(f)$ przypadkowego napięcia na rezystorze z opornością R dla prądu zmiennego wprowadzony przez Nyquista [10]:

$$(6) \quad S(f) = 4kTR \frac{\frac{h \cdot f}{k \cdot T}}{e^{\frac{h \cdot f}{k \cdot T}} - 1},$$

gdzie: f – częstotliwość [Hz], $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K – stała Boltzmanna, T – temperatura [K], $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J·s – stała Plancka.

Gęstość widmowa mocy szumów cieplnych w obwodzie elektrycznym jest wprost proporcjonalna do składowej czynnej R impedancji obwodu. Wielkość R nie oznacza rezystancji dla prądu stałego. W obwodzie elektrycznym przy stałej wartości R w założonym przedziale częstotliwości Δf powstaje przypadkowe napięcie szumu ze stałą gęstością widmową mocy. W przedstawionym modelu nie występuje problem nieskończonej wariancji szumu. W przeprowadzonych fizycznych badaniach model uzyskał potwierdzenia eksperymentalne (Johnson – 1928 r.; Moullin – 1938 r.).

Wyrażenie (6) opisuje rzeczywisty szum biały z ograniczonym pasmem częstotliwości.

W przedziale $0 \leq \frac{h \cdot f}{k \cdot T} \ll 1$

$$(7) \quad S(f) = 4kTR.$$

Przy temperaturze $T=300K$ gęstość widmowa szumu ograniczona jest od góry częstotliwością $f_g \approx 10^{13}$ Hz.

Dla zadanego pasma częstotliwości Δf wartość odchylenia standardowego szumu wynosi

$$(8) \quad \sigma = \sqrt{4kTR \cdot \Delta f}.$$

Przy $T=300K$; $R=1k\Omega$; $\Delta f=10$ kHz daje to tylko wartość $\sigma=400$ nV.

W praktyce na przebieg charakterystyki gęstości widmowej mocy szumu cieplnego mają wpływ: zależność R od f (reaktancje w obwodzie, efekty naskórkowości) i zależna od częstotliwości wariancja przewodności materiału obwodu.

Wymienione wyżej ograniczenia i zależność modelu gęstości widmowej (6) od stałych fizycznych k i h są powodem, że model bezpośrednio nie znalazł dużego zastosowania w zagadnieniach przetwarzania sygnałów losowych w złożonych układach i systemach elektronicznych.

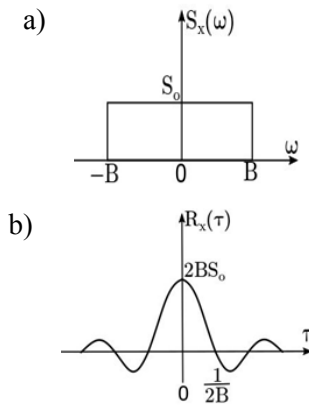
Dolnopasmowy szum biały z ograniczonym pasmem częstotliwości od 0 do B w Hz ma gęstość widmową mocy o stałej wartości w podanym paśmie i równą zero poza tym pasmem.

$$(9) \quad S_x(\omega) = \begin{cases} S_0 & |\omega| \leq 2\pi B \\ 0 & |\omega| > 2\pi B \end{cases}$$

Odpowiadająca gęstości widmowej $S_x(\omega)$ funkcja autokorelacji może być obliczona z zależności:

$$(10) \quad R_x(\tau) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{i\omega\tau} d\omega = 2BS_0 \frac{\sin 2\pi B \tau}{2\pi B \tau}.$$

Na rysunku 3 przedstawione są charakterystyki szumu białego dolnopasmowego.



Rys. 3. Charakterystyki szumu białego dolnopasmowego: a) dwustronna gęstość widmowa mocy $S_x(\omega)$; b) funkcja autokorelacji $R_x(\tau)$.

Wartość średniokwadratowa szumu $\bar{X}^2 = 2BS_0$ jest skończona. W granicy przy $B \rightarrow \infty$ funkcja autokorelacji (10) przybliża się do delty Diraca. Sygnały stochastyczne z idealnie prostokątną gęstością widmową nie występują w przyrodzie, ale do tego modelu można się dobrze przybliżyć eksperymentalnie.

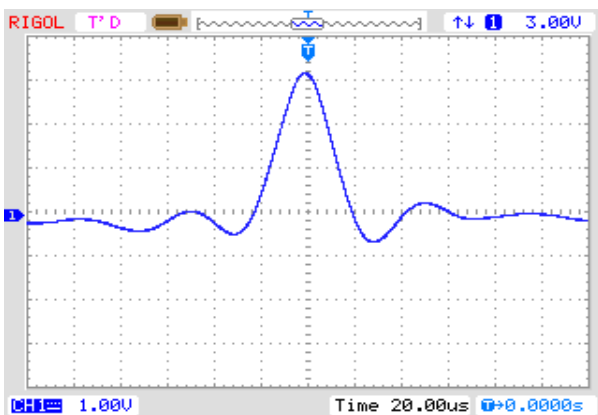
Na rysunku 4 przedstawiono charakterystykę warunkowej wartości średniej dolnopasmowego szumu białego w paśmie $B=25$ kHz o rozkładzie $N(0V; 2V)$, otrzymanego na wyjściu generatora szumu NRG201. Charakterystykę, która przybliża przebieg unormowanej zależności (10) wyznaczono na zasadzie warunkowego uśredniania (dla progu $x_p=3V$, oraz liczby uśrednień $M=256$) przy wykorzystaniu zależności:

$$(11) \quad \bar{x}(\tau)|_{x_p} = x_p \rho_x(\tau),$$

gdzie: $\bar{x}(\tau)|_{x_p}$ - charakterystyka warunkowej wartości średniej, x_p - próg warunkowego uśredniania, $\rho_x(\tau)$ - unormowana funkcja autokorelacji sygnału $x(t)$.

Ogólny kształt funkcji $\frac{\sin x}{x}$ zostaje w przybliżeniu zachowany a pierwsza zerowa wartość skorelowania występuje dla $\tau_{01} = \frac{1}{2B} = \frac{1}{2 \cdot 25 \cdot 10^3 \text{ Hz}} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ s}$.

Występuje wystarczająco dobra dla praktyki zgodność z teorią.



Rys. 4 Charakterystyka warunkowej wartości średniej $\bar{x}(\tau)|_{x_p}$ dolnopasmowego szumu białego.

Szum biały pasmowy o stałej wartości gęstości widmowej $S_x(\omega)=S_0$ w paśmie $B=f_2-f_1$ z częstotliwością środkową pasma $f_0 = \frac{f_1+f_2}{2}$ ma funkcję autokorelacji opisaną wyrażeniem:

$$(12) \quad R_x(\tau) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-2\pi f_1}^{2\pi f_2} \cos \omega \tau d\omega = 2BS_0 \frac{\sin \pi B \tau}{\pi B \tau} \cos \pi(2f_1 + B)\tau$$

Dla $f_1=0$ autokorelacja (12) przechodzi w zależność (10)

Uproszczona analiza modeli teoretycznych charakterystyk sygnałów, które przedstawiają rys. 2 i 3 wskazuje, że trudności wykorzystania praktycznego tych modeli można zmniejszyć modyfikując (zbliżając je do zależności rzeczywistych) charakterystyki $S_x(\omega)$ i $R_x(\tau)$.

Różniczkowalne szumy dolnopasmowe skorelowane wykładniczo

Układy przetwarzania sygnałów fizycznych mają ograniczone pasma częstotliwościowe. Ograniczenie w górnej części pasma dolnopasmowych układów przetwarzających nie jest strome i wynika z przebiegu charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej toru transmisyjnego.

W wielu sytuacjach dotyczących przetwarzania sygnałów losowych (zarówno w eksperymentach biernych jak i czynnych) szerokość pasma B sygnału wejściowego o cechach dolnopasmowego szumu białego jest znacznie większa od szerokości pasma toru przetwarzania sygnałów określonego częstotliwością graniczną f_g .

W praktyce model skorelowania wykładniczego uzyskują sygnały z ograniczonym pasmem o cechach szumu białego przechodzące przez fizyczne układy inercyjne. W takich sytuacjach następuje także normalizacja rozkładu prawdopodobieństwa sygnałów wyjściowych. Przejście szumu białego z jednostronną płaską gęstością

widmową mocy w paśmie B równą $G_0(\omega) = \frac{\sigma^2}{B}$ przez układ inercyjny RC opisuje zależność jednostronnej gęstości widmowej na wyjściu układu:

$$(13) \quad G_x(\omega) = G_0(\omega) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{B \cdot [1 + (\omega RC)^2]}$$

Funkcję autokorelacji na wyjściu układu inercyjnego określa przekształcenie całkowe:

$$(14) \quad R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi B} G_x(\omega) \cdot \cos(\omega \tau) d\omega = \frac{\sigma^2}{2\pi \cdot B} \int_0^{2\pi B} \frac{\cos(\omega \tau)}{1 + (\omega RC)^2} d\omega$$

Dla $\tau=0$ otrzymuje się wyrażenie:

$$(15) \quad R_x(0) = \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi BRC} \cdot \text{arctg}(2\pi BRC).$$

Średnia częstotliwość kątowna widma sygnału losowego $x(t)$ jest określona wyrażeniem:

$$(16) \quad \omega_{1x}^2 = -\rho_x''(0) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \int_0^{2\pi B} \omega^2 G_x(\omega) d\omega,$$

przy czym $\rho_x''(0)$ – druga pochodna unormowanej funkcji autokorelacji sygnału $x(t)$ dla $\tau=0$.

Uwzględniając wyrażenia (13) i (16), otrzymuje się:

$$(17) \quad \omega_{1x} = \sqrt{-\rho_x''(0)} = \sqrt{\frac{1}{(RC)^2} \left(\frac{2\pi BRC}{\arctg 2\pi BRC} - 1 \right)}.$$

Dla $\tau=0$ funkcja autokorelacji posiada skończoną wartość pochodnej, a przedstawiony model sygnału jest przydatny w zastosowaniach praktycznych.

Przykład

Napięciowy dolnopasmowy w paśmie $B = 25$ kHz szum biały oddziałuje na wejście układu inercyjnego pierwszego rzędu o stałej czasowej $T = RC = 10^{-4}$ s. Należy obliczyć wariancję sygnału na wyjściu układu inercyjnego oraz średnią częstotliwość kątową widma.

Rozwiązanie

Obliczenia pomocnicze:

$$2\pi BRC = 2\pi \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} = 5\pi.$$

$$\arctg(2\pi BRC) = \frac{\pi}{2}.$$

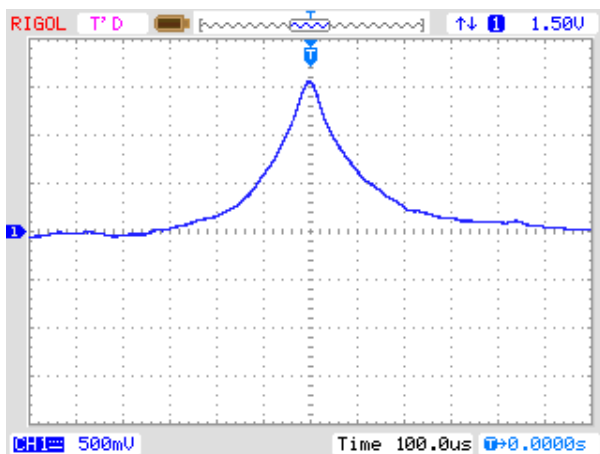
Wariancja sygnału na podstawie (15):

$$R_x(0) = \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi BRC} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sigma^2}{4\pi BRC} = \frac{\sigma^2}{10}.$$

Średnia częstotliwość kątową widma szumu na podstawie (17):

$$\omega_{1x} = \sqrt{\frac{1}{(RC)^2} \left(\frac{2\pi BRC}{\arctg 2\pi BRC} \right) - 1} = 3 \cdot 10^4 \text{ rad/s}.$$

Obliczanie funkcji autokorelacji bezpośrednio z wyrażenia (14) może być trudne. Można wyznaczyć estymatę przebiegu funkcji unormowanej $\hat{\rho}_x(\tau)$ na zasadzie warunkowego uśredniania.



Rys. 5. Charakterystyka warunkowej wartości średniej dolnopasmowego szumu białego przetworzonego w układzie inercyjnym

Dla danych z przykładu na rysunku 5 przedstawiono funkcję warunkowej wartości średniej $\bar{x}(\tau)|_{x_p}$ proporcjonalną do funkcji autokorelacji $\rho_x(\tau)$.

Charakterystykę warunkowej wartości średniej wyznaczono oscyloskopem cyfrowym dla progu $x_p=1,5$ V i liczby uśrednień $M=256$.

Przebieg autokorelacji jest prostym, zbliżonym do wykładniczego modelem, który umożliwia określenie $\rho''(0)$ i τ_k a także maksymalny interwał korelacji τ_{km} .

Korzystną modyfikacją przebiegu charakterystyk $S_x(\omega)$ i $R_x(\tau)$ szumu białego przetwarzanego w układzie inercyjnym (zależności (3) i (4)) uzyskuje się poprzez kolejne przetwarzanie inercyjne.

Można wykazać, że dla stałej czasowej $T_1 = \frac{1}{\beta}$ oraz dla

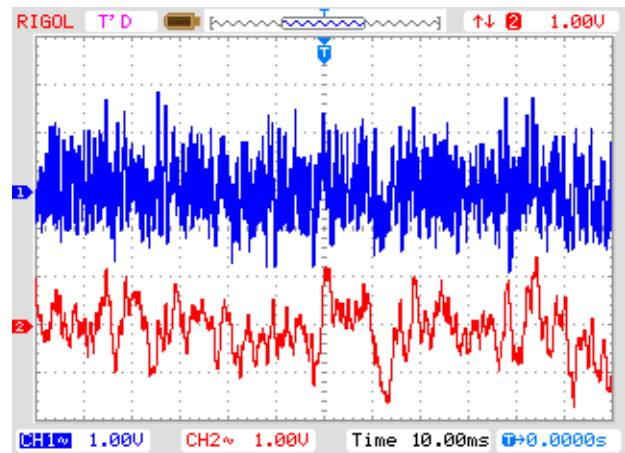
$k=1$ w inercyjnym torze funkcję autokorelacji $R_y(\tau)$ dla $\tau \geq 0$ opisuje zależność:

$$(18) \quad R_y(\tau) = \frac{\beta\sigma_x^2}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \alpha \exp(-\beta\tau) - \beta \exp(-\alpha\tau) \}.$$

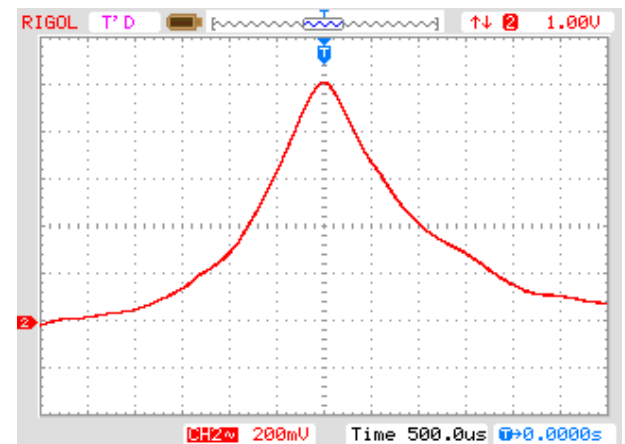
Gęstość widmowa mocy $G_y(\omega)$ oraz wariancja sygnału wyjściowego są określone wyrażeniami:

$$(19) \quad G_y(\omega) = \frac{4\beta^2\alpha\sigma_x^2}{(\alpha^2 + \omega^2)(\beta^2 + \omega^2)},$$

$$(20) \quad \sigma_y^2 = R_y(0) = \frac{\beta\sigma_x^2}{(\alpha + \beta)}.$$



Rys. 6. Przebiegi sygnałów: 1 - $x(t)$; 2 - $y(t)$



Rys. 7. Charakterystyka warunkowej wartości średniej $\mu_{y|y_p}$ proporcjonalna do $\rho_y(\tau)$;

Na rysunkach 6 i 7 przedstawiono wyniki eksperymentu oddziaływania szumem $N(0V; 0,5V)$ z dobrym przybliżeniem wykładniczego modelu autokorelacji (4). W układzie inercyjnym o stałej czasowej $T_I=1,114 \cdot 10^{-6}$ s występowało wzmocnienie $k=3$. Stosowane w modelach eksperymentalnych parametry wynosiły $\alpha=9708$ i $\beta=897$. Odzworowanie eksperymentalne unormowanej funkcji autokorelacji sygnału $y(t)$ ma skończoną wartość pochodnej dla $\tau=0$ i zbliżony do wykładniczego przebieg (rys. 7).

Przy rzeczywistym złożonym przetwarzaniu sygnałów losowych często sygnały z ograniczoną i w przybliżeniu stałą w wybranym paśmie gęstością widmową mocy $G_x(\omega)$ są poddawane kolejnym operacjom filtracji i wzmocnienia głównie w zakresie małych częstotliwości.

Charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową wielostopniowego wzmacniacza można przybliżyć funkcją Gaussa:

$$(21) \quad K(\omega) = K_0 e^{-\frac{\omega^2}{2\beta^2}}$$

z szerokością częstotliwościowego pasma przenoszenia $\Delta f = \beta\sqrt{\pi}$. Przy wzmocnieniu takim wzmacniaczem sygnału losowego o modelu szumu białego (praktycznie szerokopasmowego) o gęstości widmowej jednostronnej $G_0 = \text{const}$, gęstość widmowa na wyjściu wzmacniacza

$$(22) \quad G_x(\omega) = G_0 \left[K_0 e^{-\frac{\omega^2}{2\beta^2}} \right]^2 = G_0 K_0^2 e^{-\frac{\omega^2}{\beta^2}}$$

Odpowiadająca gęstości widmowej funkcja autokorelacji wynosi:

$$(23) \quad R_x(\tau) = \frac{G_0 K_0^2}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{\omega^2}{\beta^2}} \cos \omega\tau d\omega = \frac{G_0 K_0^2}{4\sqrt{\pi}} \beta \cdot e^{-\frac{\beta^2}{4}\tau^2}$$

Zależności (23) i (22), po przeliczeniu parametrów, można przedstawić modelami ogólnymi, które są przydatne do wykorzystania teoretycznego i praktycznego w przetwarzaniu sygnałów losowych dolnopasmowych:

$$(24) \quad R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha^2 \tau^2},$$

$$(25) \quad G_x(\omega) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha} \sigma_x^2 \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}$$

Wartość $-p''(0)$ dla tego modelu autokorelacji wynosi $2\alpha^2$.

Podsumowanie

Modele szumu białego i szumu dolnopasmowego o skorelowaniu wykładniczym i braku skończonej wartości pochodnej dla $\tau=0$ mają ograniczoną przydatność w porównywaniu analiz teoretycznych i ocen eksperymentalnych sygnałów losowych.

Modelami teoretycznymi bardziej przydatnymi w praktyce są modele szumów z ograniczonym pasmem częstotliwości przetwarzane w układach filtrujących i wzmacniających. Przykładem mogą być szумы ciepłe.

Szумы przetwarzane w takich układach uzyskują rozkłady normalne. Charakterystyki korelacyjne szumów pasmowych, których funkcje gęstości prawdopodobieństwa są normalne, można wyznaczać techniką warunkowego uśredniania.

Szумы stacjonarne mające ciągłe funkcje autokorelacji i ich drugie pochodne dla $\tau=0$ są ciągłe i różniczkowalne. W artykule pokazano przydatność teoretyczną i praktyczną różniczkowalnych modeli szumów pasmowych: szumu białego z oscylacyjnie zanikającą funkcją autokorelacji i szumu dolnopasmowego z wykładniczą funkcją autokorelacji. Podano i analizowano modele matematyczne szumów w dziedzinie częstotliwości i czasu. Eksperymentalnie wyznaczono funkcje autokorelacji techniką warunkowego uśredniania sygnałów.

Należy zauważyć, że wszystkie stosowane modele matematyczne charakterystyk układów fizycznych i szumów są pewną idealizacją. Celem artykułu jest wskazanie modeli matematycznych szumów pasmowych, do których z wystarczającą dla praktyki dokładnością można się przybliżać eksperymentalnie.

Autor: prof. dr hab. inż. Adam Kowalczyk, Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza, Katedra Metrologii i Systemów Diagnostycznych, ul. Wincentego Pola 2, 35-959 Rzeszów, e-mail: kowadam@prz.edu.pl.

LITERATURA

- [1] Papoulis A.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. PWN, Warszawa 1972
- [2] Левин Б. П.: Теоретические основы статистической радиотехники, т. 1-3. Советское радио, Москва 1974
- [3] Hasse L., Spiralski L.: Szумы elementów i układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1981
- [4] Бобнев М. П.: Генерирование случайных сигналов. Энергия, Москва 1971
- [5] Быков В. В.: Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. Советское Радио, Москва 1971.
- [6] Wehrmann W.: Einfuhrung in die stochastisch-ergodische Impulstechnik. Oldenbourg Verlag, 1973
- [7] Max J.: Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques, vol. 1, 2. Masson, Paris 1981
- [8] Wiczorkowski R., Zieliński R.: Komputerowe generatory liczb losowych. WNT, Warszawa 1997
- [9] Hanus R., Szlachta A., Kowalczyk A.: Generowanie sygnałów stochastycznych o zadanych charakterystykach statystycznych w badaniach metod estymacji czasu opóźnienia. *Pomiary, Automatyka Kontrola*, vol. 57 (2011), nr 2, 981-984
- [10] Nyquist H.: Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.* 1928. N4.
- [11] Мирский Г. Й.: Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. Энергоиздат, Москва 1982.
- [12] Shanmugan K.S., Breipohl A.M.: Random signals detection, estimation and data analysis. Wiley&Sons, New York. 1988
- [13] Bendat J.S., Piersol A.G.: Random data – analysis and measurement procedures. Wiley, New York 2000
- [14] Kowalczyk A.: Pomiarowe zastosowania warunkowego uśredniania sygnałów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2015
- [15] Kowalczyk A., Szlachta A., Hanus R., Chorzępa R.: Estimation of conditional expected value for exponentially autocorrelated data. *Metrology and Measurement Systems*, vol. 24 (2017), n. 1, 69–78