

Obliczanie współczynników pojemnościowych układu ciał przewodzących Iteracyjną Metodą Rozwiązań Fundamentalnych

Streszczenie. W pracy zaprezentowano procedurę obliczania współczynników pojemnościowych trójwymiarowych układów elektrostatycznych, opartą na idei Iteracyjnej Metody Rozwiązań Fundamentalnych. Procedura ta pozwala na bezpośrednie wyznaczanie ładunków zgromadzonych na powierzchniach ciał przewodzących bez konieczności obliczania rozkładu pola elektrycznego. Umożliwia ona także ustalenie żądanej dokładności rozwiązania. W przeprowadzonym teście numerycznym stwierdzono bardzo dobrą zbieżność i efektywność metody.

Abstract. A procedure for calculating the capacitive coefficients of three-dimensional electrostatic systems, based on the idea of the Iterative Method of Fundamental Solutions is presented in the paper. This procedure allows direct determination of charges on the surfaces of conductive bodies without the need to calculate the distribution of the electric field. It also allows you to determine the desired accuracy of the solution. The numerical test performed showed very good convergence and efficiency of the method. (Calculation of the capacitive factors of the conducting bodies by the Iterative Method of Fundamental Solutions).

Słowa kluczowe: iteracyjna metoda rozwiązań fundamentalnych, elektrostatyka, równanie Laplace'a, współczynniki pojemnościowe
Keywords: iterative method of fundamental solutions, electrostatics, Laplace equation, capacitance factors

Wstęp

Układy elektrostatyczne zawierające N ciał przewodzących w ośrodku liniowym ($\varepsilon = \text{const}$) charakteryzowane są macierzą współczynników pojemnościowych $[C]$ zdefiniowanej zależnością:

$$(1) \quad [C][V] = [Q]$$

gdzie $[V]$, $[Q]$ są macierzami kolumnowymi potencjałów ciał przewodzących i ładunków na nich zgromadzonych (odpowiednio). Na podstawie macierzy $[C]$ można łatwo określić pojemności zastępcze układu, co pozwala go modelować obwodem z elementami skupionymi [1, 2]. Stosowana zwykle procedura wyznaczenia elementów macierzy $[C]$ wymaga na ogół N -krotnego powtórzenia następujących kroków:

- rozwiązanie równania Laplace'a dla potencjału elektrostatycznego przy warunkach brzegowych

$$(2) \quad \varphi|_{S_m} = 1, \quad \varphi|_{S_n} = 0, \quad n \neq m, \quad m, n = 1, \dots, N$$

gdzie S_n – powierzchnia brzegowa n -tego ciała przewodzącego układu,

- wyznaczenie składowych natężenia pola elektrycznego E (różniczkowanie potencjału),
- określenie rozkładu gęstości powierzchniowej ładunku σ ($\sigma = \varepsilon E_n$) na ciałach przewodzących,
- obliczanie całek powierzchniowych z funkcji σ w celu wyznaczenia ładunków całkowitych zgromadzonych na powierzchniach przewodzących,
- obliczanie współczynników macierzy $[C]$ (na podstawie (1)).

Alternatywną drogą może być też obliczanie całkowitej energii pola (po wyznaczeniu jego rozkładu), co jednak wymaga obliczania całek objętościowych po całym rozważanym obszarze.

Z przedstawionego opisu wynika, że w przypadku trójwymiarowych zagadnień wielu ciał procedura ta może być czasochłonna.

W pracy zaproponowano numeryczną procedurę pozwalającą wyznaczyć współczynniki pojemnościowe w sposób znacznie prostszy i bardziej efektywny, nie wymagający nawet obliczania rozkładu pola elektrycznego. Jej dodatkową zaletą jest łatwość oceny i kontrola błędów

rozwiązania. Proponowana procedura opiera się na idei Iteracyjnej Metody Rozwiązań Fundamentalnych (IMRF) [3, 4, 5].

Sformułowanie zagadnienia

Rozważany układ składa się z N ciał przewodzących zanurzonych w jednorodnym, izotropowym dielektryku o stałej przenikalności elektrycznej ε . Zakłada się, że w układzie nie płyną prądy i pole jest statyczne. Przy takich założeniach pole może być opisywane potencjałem skalarnym φ ($E = -\text{grad } \varphi$), spełniającym w obszarze dielektrycznym równanie Laplace'a:

$$(3) \quad \Delta \varphi = 0$$

oraz warunki brzegowe Dirichleta na powierzchniach ciał przewodzących:

$$(4) \quad \varphi|_{S_n} = V_n, \quad n = 1, \dots, N$$

Można wykazać [2, 6], że w opisanym układzie wartości ładunków zgromadzonych na powierzchniach ciał przewodzących stanowią liniową kombinację potencjałów V_n :

$$(5) \quad Q_m = \sum_{n=1}^N c_{m,n} V_n$$

Wielkości $c_{m,n}$ nazywane *współczynnikami pojemnościowymi* zależą tylko od kształtu i usytuowania ciał przewodzących oraz od przenikalności elektrycznej. Nietrudno wykazać, że $c_{m,n} = c_{n,m}$, czyli macierz $[C]$ jest symetryczna [2, 6].

W rozważanym zagadnieniu wielkości $c_{m,n}$ są wielkościami poszukiwanymi.

Opis metody

Zagadnienie wyznaczania współczynników pojemnościowych można sprowadzić do obliczania ładunków na ciałach przewodzących układu przy N różnych określonych warunkach brzegowych dla potencjału φ . Przyjmując je tak jak w (2) nietrudno zauważyć, że (por. (5)):

$$(6) \quad c_{m,n} = Q_m$$

Proponowana procedura obliczania ładunków Q_m opiera się na idei IMRF [3, 4, 5]. Ma ona charakter iteracyjny. W k -tym kroku iteracji wybierane jest po L_m różnych punktów $\mathbf{r}_{k,m,i}$

($i = 1, \dots, L_m$) we wnętrzu każdego z obszarów przewodzących. Wybór tych punktów jest w zasadzie dowolny (np. może mieć charakter losowy), jednak od niego może zależeć szybkość zbieżności metody. Na podstawie testów numerycznych zaleca się, żeby punkty te nie były umieszczane zbyt blisko siebie i brzegów analizowanego obszaru.

Każdemu z punktów $\mathbf{r}_{k,m,i}$ przyporządkowuje się parametr rzeczywisty $q_{k,m,i}$, który może być interpretowany jako wartość fikcyjnego ładunku elektrycznego, znajdującego się w tym punkcie. Ładunki te nazywane będą dalej *źródłami fikcyjnymi*.

Przybliżony rozkład potencjału przedstawiany jest w postaci sumy potencjału obliczonego w poprzednim kroku iteracji oraz pochodzącego od źródeł fikcyjnych wybranych w kroku bieżącym:

$$(7) \quad \tilde{\varphi}_k(\mathbf{r}) = \tilde{\varphi}_{k-1}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^{L_m} \frac{q_{k,m,i}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k,m,i}|}, \quad \tilde{\varphi}_0(\mathbf{r}) \equiv 0$$

Niezależnie od wyboru położenia źródeł fikcyjnych, funkcja (7) spełnia dokładnie równanie (3) w obszarze dielektrycznym (jako kombinacja liniowa rozwiązań równania Laplace'a) i jest w nim wszędzie ograniczona (jej punkty osobliwe $\mathbf{r}_{k,m,i}$ leżą poza obszarem dielektrycznym).

Przybliżone spełnienie warunków brzegowych (2) uzyskuje się przez odpowiednie określenie wartości źródeł fikcyjnych $q_{k,m,i}$. W tym celu wprowadza się miarę dokładności spełnienia tych warunków. Lokalne odchylenia rozwiązania przybliżonego od dokładnego na powierzchniach obszarów przewodzących opisują funkcje:

$$(8) \quad \epsilon_{k,m}(\mathbf{r}) = \tilde{\varphi}_k(\mathbf{r}) - V_m, \quad \mathbf{r} \in S_m$$

Jako miarę dokładności całego rozwiązania przyjmuje się ich sumaryczną, średniokwadratową normę, nazywaną dalej *błędem brzegowym*:

$$(9) \quad \delta_k = \sqrt{\sum_{m=1}^N \frac{1}{S_m} \iint_{S_m} \epsilon_{k,m}^2 dS_m}$$

Warunek jego minimalizacji ($\partial \delta_k / \partial q_{k,m,i} = 0$) prowadzi, na drodze standardowej procedury najlepszej aproksymacji [7], do układu równań liniowych:

$$(10) \quad \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^{L_m} a_{k,m,n,i,j} q_{k,m,i} = b_{k,n,j}$$

którego współczynniki wyrażają się wzorami:

$$(11) \quad a_{k,m,n,i,j} = \sum_{l=1}^N \iint_{S_l} \frac{dS_l}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k,m,i}| |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k,n,j}|}$$

$$(12) \quad b_{k,n,j} = -4\pi\epsilon \sum_{l=1}^N \iint_{S_l} \frac{\epsilon_{k-1,l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k,n,j}|} dS_l$$

Po numerycznym obliczeniu tych współczynników i rozwiązaniu układu (10) (np. metodą eliminacji Gaussa) otrzymuje się zbiór wartości źródeł fikcyjnych $q_{k,m,i}$, które po

podstawieniu do (7) dają kolejne przybliżenie poszukiwanego rozwiązania.

W każdym kroku iteracji obliczane są lokalne odchylenia brzegowe rozwiązania (8) oraz błąd brzegowy (9), co pozwala kontrolować szybkość zbieżności obliczeń. Można wykazać, że ciąg błędów brzegowych uzyskiwanych w kolejnych krokach iteracji jest ciągiem nierosnącym, co zapewnia zbieżność metody (w sensie słabym) [3]. Po osiągnięciu żądanej dokładności (np. założonej maksymalnej wartości odchylenia lokalnego lub błędu brzegowego) proces iteracyjny zostaje zatrzymany. Obliczone w ten sposób wartości ładunków fikcyjnych, po podstawieniu do (7), pozwalają wyznaczyć rozkład potencjału w dowolnym punkcie, jak też natężenia pola elektrycznego (po analitycznym zróżniczkowaniu (7)). Na podstawie zasady maksimum obowiązującej dla dowolnego rozwiązania równania Laplace'a można wykazać, że odchylenie rozwiązania przybliżonego od dokładnego nie może przekraczać odchylenia maksymalnego na brzegu, co pozwala na górne oszacowanie błędu całego rozwiązania.

W celu obliczenia ładunków zgromadzonych na ciałach przewodzących (i stąd współczynników pojemnościowych układu), znajomość rozkładu pola nie jest jednak konieczna. Wystarczy zauważyć, że jeżeli uzyskane na opisanej drodze rozwiązanie jest dobrym przybliżeniem rozwiązania dokładnego, to strumień pola elektrycznego emitowany przez ładunki fikcyjne znajdujące się we wnętrzu danego obszaru przewodzącego jest dobrym przybliżeniem strumienia emitowanego przez ładunki rzeczywiste zgromadzone na ich powierzchniach. Zgodnie z prawem Gaussa oznacza to, że sumaryczna wartość ładunków fikcyjnych znajdujących się we wnętrzu tego obszaru jest w przybliżeniu równa sumarycznej wartości Q_m ładunków rzeczywistych na nich zgromadzonych:

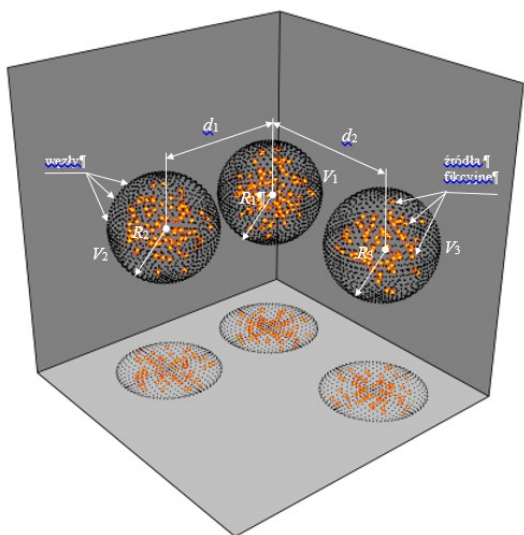
$$(13) \quad Q_m \approx \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{L_m} q_{k,m,i}$$

skąd, zgodnie z (6), można bezpośrednio określić współczynniki pojemnościowe.

Test numeryczny

Na podstawie opisanej procedury utworzono w języku FORTRAN77 program numeryczny realizujący obliczenia współczynników pojemnościowych dla dowolnie zadanej liczby N ciał przewodzących o kształcie kulistym, których rozmieszczenie w przestrzeni też może być dowolnie zadane. Realizuje on kolejno obliczenia dla N odrębnych zagadnień brzegowych opisanych warunkami (2), wyznaczając w każdym z nich po N współczynników pojemnościowych (współczynniki pozadiagonalne $c_{m,n}$ i $c_{n,m}$ są wyznaczane niezależnie). Położenia źródeł fikcyjnych wybierane są losowo z wcześniej utworzonej bazy punktów. Ich liczbę L_m uwzględnianą w każdym kroku iteracyjnym (por. (7)) użytkownik może zadać dowolnie. Poza parametrami geometrycznymi użytkownik zadaje też żadaną dokładność obliczeń (błąd brzegowego δ i maksymalnego odchylenia lokalnego ϵ_{\max}), po osiągnięciu której program przerywa działanie. Niezależnie można też zadać maksymalny czas przebiegu programu i maksymalną liczbę iteracji. Współczynniki pojemnościowe wyznaczane są w każdym kroku iteracji, co pozwala dodatkowo ocenić zbieżność metody i dokładność obliczeń.

W celu zbadania efektywności opisanej metody wykonano serię testów numerycznych, z których jeden zaprezentowano poniżej. Dotyczy on układu trzech ciał przewodzących o kształcie kulistym rozmieszczonych, jak na rysunku 1,



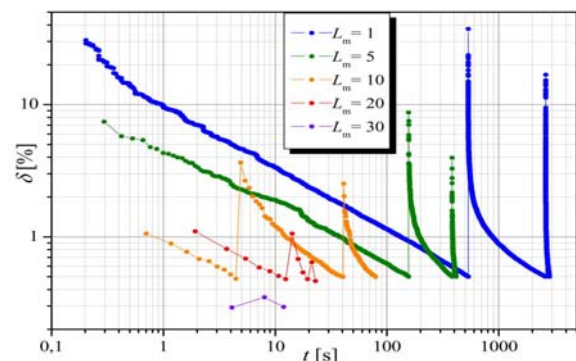
Rys. 1. Analizowany układ

Przyjęto następujące wartości parametrów geometrycznych: $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ mm, $d_1 = 25$ mm,

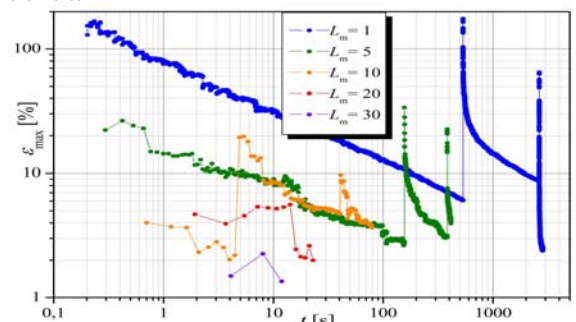
$d_2 = 30$ mm. Żądaną dokładność ustalono na $\delta = 0,5$ %. Obliczenia przeprowadzono dla różnie zadanych wartości L_m : 1, 5, 10, 20, 30.

Zaprezentowane dalej rezultaty otrzymano za pomocą komputera z procesorem Intel® Core™ i7-3770 CPU @ 3.50GHz 3.90 GHz, RAM 32 GB.

Wykresy na rysunkach 2, 3 przedstawiają otrzymane zależności błędu brzegowego δ i maksymalnego odchylenia lokalnego ϵ_{max} uzyskiwanych w kolejnych krokach iteracji (kolejne punkty odpowiadają kolejnym iteracjom) w funkcji rzeczywistego czasu przebiegu programu.

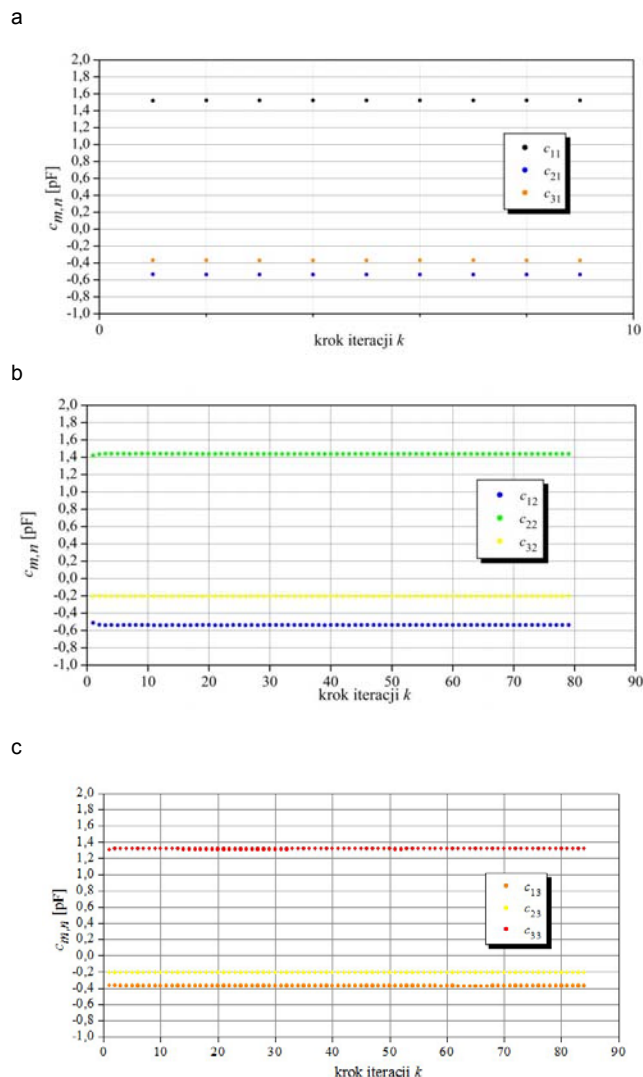


Rys.2. Ciągi błędów brzegowych w kolejnych krokach iteracyjnych w funkcji czasu rzeczywistego dla różnie zadanych liczb L_m (por. (7) i (9)).



Rys.3. Ciągi odchyżeń maksymalnych w kolejnych krokach iteracyjnych w funkcji czasu rzeczywistego dla różnie zadanych liczb L_m (por. (7) i (8)).

Na każdym z wykresów na rysunku 2 można zauważyć moment osiągnięcia wymaganej dokładności dla rozwiązywanego zagadnienia brzegowego ($\delta = 0,5$ %), po którym następuje przejście do rozwiązywania kolejnego zagadnienia (zmiana warunków brzegowych).



Rys. 4 Współczynniki pojemnościowe w kolejnych krokach iteracji przy $L_m = 10$, dla warunków brzegowych a) $V_1 = 1, V_2 = 0, V_3 = 0$; b) $V_1 = 0, V_2 = 1, V_3 = 0$; c) $V_1 = 0, V_2 = 0, V_3 = 1$

Jak należało się spodziewać, ze wzrostem liczby L_m następuje poprawa zbieżności procedury. Należy jednak zwrócić uwagę, że ze wzrostem L_m silnie rośnie czas obliczeń pojedynczego kroku iteracji i z tego powodu przyjęcie zbyt dużej jej wartości może niepotrzebnie wydłużyć całkowity czas obliczeń. W opisywanym teście najkrótszy czas obliczeń (ok. 12 s) uzyskano przyjmując

$L_m = 30$. W tym przypadku wymagana dokładność dla każdego z trzech rozwiązywanych zagadnień brzegowych uzyskiwana jest już w pierwszym kroku iteracji.

Wykresy na rysunkach 4a, 4b, 4c przedstawiają obliczane współczynniki pojemnościowe w kolejnych krokach iteracji przy $L_m = 10$, dla warunków brzegowych a) $V_1 = 1, V_2 = 0,$

$V_3 = 0$; b) $V_1 = 0, V_2 = 1, V_3 = 0$; c) $V_1 = 0, V_2 = 0, V_3 = 1$

Jak widać, już po kilku pierwszych iteracjach, wartości współczynników pojemnościowych w kolejnych krokach zmieniają się bardzo nieznacznie.

Porównanie ich wartości w ostatnich kilku krokach iteracji wskazuje, że różnice między nimi pojawiają się zwykle na czwartym miejscu po przecinku (Tabela 1).

Tabela 1. Współczynniki pojemnościowe obliczone w pięciu ostatnich iteracjach $L_m = 10$ (K – całkowita liczba kroków iteracji; por. Rys. 4a, 4b, 4c)

Rys. 4a	c_{11}	c_{12}	c_{13}
K-4	1,522850	-0,535028	-0,368155
K-3	1,523286	-0,535620	-0,368040
K-2	1,522985	-0,535461	-0,367931
K-1	1,523501	-0,535497	-0,368339
K	1,523181	-0,535580	-0,368067
Rys. 4b	c_{21}	c_{22}	c_{23}
K-4	-0,536942	1,439408	-0,202078
K-3	-0,537051	1,439591	-0,202090
K-2	-0,536893	1,439430	-0,202081
K-1	-0,536955	1,439409	-0,202034
K	-0,536876	1,439414	-0,202099
Rys. 4c	c_{31}	c_{32}	c_{33}
K-4	-0,367875	-0,202208	1,315419
K-3	-0,367893	-0,202161	1,315388
K-2	-0,367993	-0,202154	1,315502
K-1	-0,367986	-0,202135	1,315416
K	-0,367916	-0,202145	1,315333

Należy też zwrócić uwagę na podobnie niewielkie różnice między niezależnie obliczonymi współczynnikami pozadiagonalnymi $c_{m,n}$ i $c_{n,m}$. Fakty te potwierdzają poprawność obliczeń i wskazują na bardzo dobrą zbieżność opisaną procedurę.

W celu bardziej precyzyjnego oszacowania błędu obliczonych tu współczynników pojemnościowych dokonano dodatkowych obliczeń przy założonym błędzie brzegowym $\delta = 0,02\%$ i $L_m = 100$ (czas obliczeń ok. 50 min).

Maksymalne odchylenie lokalne wyniosło $\varepsilon_{\max} = 0,16\%$, wyniki te można więc uznać za bardzo dokładne. W rezultacie otrzymano następującą macierz współczynników pojemnościowych:

$$(14) \quad [C] = \begin{bmatrix} 1,524275 & -0,536558 & -0,368398 \\ -0,536560 & 1,4394507 & -0,202301 \\ -0,368399 & -0,202301 & 1,316344 \end{bmatrix}$$

Względne różnice między tymi wynikami, a zaprezentowanymi w tabeli 1. nie przekraczają 0,2 %.

Ponieważ różnice te są wyraźnie mniejsze od błędu brzegowego opisanych wcześniej rozwiązań ($\delta = 0,5\%$), można uznać, że błąd ten stanowi również wiarygodne, odgórne oszacowanie dokładności obliczanych współczynników pojemnościowych opisaną metodą.

Podsumowanie

W pracy zaprezentowano procedurę obliczania współczynników pojemnościowych trójwymiarowych układów elektrostatycznych, opartą na idei iteracyjnej Metody Rozwiązań Fundamentalnych. Procedura ta pozwala na bezpośrednie wyznaczanie ładunków zgromadzonych na powierzchniach ciał przewodzących

(i stąd współczynników pojemnościowych), tj. bez konieczności obliczania rozkładu pola elektrycznego i całkowania funkcji gęstości ładunku. Ponadto umożliwia ona ustalenie żądanej dokładności rozwiązania, po osiągnięciu której proces iteracyjny zostaje zatrzymany.

W przeprowadzonym teście numerycznym, dotyczącym układu trzech kul przewodzących, zanurzonych w ośrodku dielektrycznym, stwierdzono bardzo dobrą zbieżność i efektywność metody. Tempo jej zbieżności zależy w głównej mierze od liczby L_m źródeł fikcyjnych uwzględnianych w każdym kroku iteracyjnym.

Przy zadanej dokładności 0,5 % i odpowiednio dobranej liczbie L_m (ok. 30) całkowity czas obliczeń dla analizowanego układu może wynosić kilkanaście sekund.

Autorzy: Stanisław Pawłowski DSc PhD, Department of Electrodynamics and Electrical Machine Systems, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów, Poland; E-mail: spawlo@prz.edu.pl. Jolanta Plewako PhD, EE, Department of Power Electronics and Power Engineering, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów, Poland; E-mail: jplewako@prz.edu.pl

LITERATURA

- [1] H. Rawa, Elektryczność i magnetyzm w technice, PWN, Warszawa, 1994.
- [2] B. Wisz, Matematyczne modelowanie pojemności w warstwowych strukturach mikroukładów elektronicznych, Oficyna Wydawnicza PRz, Rzeszów, 2013.
- [3] S. Pawłowski, "Solutions of Boundary Value Problem Approximated by Fundamental Solutions", Journal of Technical Physics, vol. 34, 2, pp. 161-172, 1993.
- [4] Pawłowski, S., Analiza pola elektrostatycznego w otoczeniu ciał przewodzących metodą aproksymacyjno-brzegową, Zesz. Nauk. P. Rz. nr 145, Elektrotechnika z. 17, pp. 69-80, 1996.
- [5] S. Pawłowski, J. Plewako, P. Grodzki, "Porównanie efektywności iteracyjnej metody rozwiązań fundamentalnych i metody elementów skończonych w analizie zagadnień elektrostatyki", Przegląd Elektrotechniczny, vol. 93, 12, pp. 135-138, 2017.
- [6] R. S. Ingarden, A. Jamiołkowski A, Elektrodynamika Klasyczna, WNT, Warszawa, 1980.
- [7] Achiezer N.I., Teoria aproksymacji, PWN, Warszawa, 1957.