

Właściwości wybranych algorytmów do estymacji częstotliwości w dokładnych pomiarach napięcia sinusoidalnego

Streszczenie. W artykule przedstawiono wyniki badań symulacyjnych właściwości wybranych cyfrowych algorytmów do estymacji częstotliwości w warunkach pracy przyrządów do dokładnych pomiarów napięcia sinusoidalnego. Zastosowano opracowany algorytm do pomiaru częstotliwości, oparty o pomiar przesunięcia fazowego z zastosowaniem DFT (Dyskretnej Transformaty Fouriera) oraz znane z literatury trzy algorytmy z interpolacją widma i algorytm zupełnych kwadratów błędów TLS (Total Least Squares). Wyniki badań wskazują, że opracowany algorytm cechuje się najlepszymi właściwościami.

Abstract. The article presents the results of the simulation properties of selected digital algorithms to estimate the frequency, in the operating conditions of instruments for accurate measurements of sinusoidal voltage. A developed algorithm based on a phase shift measurement with a use of DFT (Discrete Fourier Transform) and four algorithms known from literature, three with spectral interpolation and a total least squares (TLS), were applied. The research results indicate that the developed algorithm is characterized by the best properties. (Properties of selected frequency estimation algorithms in accurate sinusoidal voltage measurements).

Słowa kluczowe: algorytmy, estymacja częstotliwości, pomiar przesunięcia fazowego, dokładny pomiar napięcia.

Keywords: algorithms, frequency estimation, phase shift measurement, accurate voltage measurement.

Wstęp

Artykuł dotyczy problematyki dokładnych cyfrowych pomiarów wartości skutecznej napięcia sinusoidalnego, wykonywanych z dokładnością pojedynczych ppm. Uzyskanie tak dużej dokładności pomiarów wymaga między innymi zapewnienia jak najlepszej synchronizacji częstotliwości próbkowania przyrządu pomiarowego z częstotliwością napięcia mierzonego [1]. W praktyce, dla komercyjnych źródeł napięcia i układów pomiarowych, zawierających odrębne układy zegarowe o dokładności przeważnie 0,01%, nie uzyskuje się wystarczającej synchronizacji częstotliwości. Dlatego w celu poprawy dokładności pomiarów napięć poszukuje się odpowiednich metod pomiarowych [2] i cyfrowych algorytmów [1] do przetwarzania próbek napięcia sinusoidalnego. Jedną z metod może być dokładny pomiar częstotliwości napięcia mierzonego i zastosowanie odpowiedniego algorytmu do wyliczenia wartości skutecznej.

W artykule przedstawiono wyniki badań symulacyjnych właściwości wybranych cyfrowych algorytmów do estymacji (pomiaru) częstotliwości w warunkach pracy przyrządów do dokładnych pomiarów napięć. Badane algorytmy to opracowany algorytm oparty o pomiar przesunięcia fazowego z zastosowaniem DFT [3] i popularne algorytmy z interpolacją widma: Jacobsena [4], Jacobsena oraz Aboutaniana i Mulgrewa (AM) z oknem Hanninga [5,6], Borkowskiego, Kani i Mroczka (BKM) [7,8], oraz algorytm zupełnych kwadratów błędów (TLS) [9,10].

Warunki pracy algorytmów wynikają z założenia, że napięcie sinusoidalne o częstotliwości f próbkowane jest z częstotliwością f_p oraz obie częstotliwości dobierane są tak, aby uzyskać próbki z całkowitej liczby k okresów mierzonego napięcia. Ze względu na występujące w praktyce ograniczenia sprzętowe przyjęto, że obie częstotliwości f_p i f ustalone są przed pomiarem, a ich błędy graniczne wynoszą 0,01%. Oznacza to, że stosunek obu ustalanych częstotliwości obciążony jest błędem δ o wartości granicznej 0,02%.

W wyniku błędu synchronizacji częstotliwości δ wystąpi niekoherentne próbkowanie napięcia i dla określonej liczby próbek M oknu pomiarowemu odpowiadać będzie liczba okresów mierzonego napięcia $(k+\Delta)$, gdzie k jest liczbą całkowitą, co można zapisać zależnością:

$$(1) \quad \frac{f}{f_p}(1+\delta) = \frac{k+\Delta}{M}.$$

Algorytmy do estymacji częstotliwości

W [3] przedstawiono opracowany własny algorytm, który umożliwi wyznaczenie błędu δ i na jego podstawie wyznaczenie poprawki dla nastawy częstotliwości mierzonego napięcia, celem uzyskania koherentnego próbkowania ($\Delta = 0$). Algorytm ten oparty jest o metodę pomiaru przesunięcia fazowego z zastosowaniem dyskretnego przekształcenia Fouriera (DFT) i można zastosować go do estymacji częstotliwości.

W pierwszej kolejności napięcie sinusoidalne próbkowane jest równomiernie z częstotliwością f_p . Założono, że w wyniku tej operacji otrzymujemy parzystą liczbę M próbek:

$$(2) \quad u(n, \delta) = U_m \sin\left(2\pi \frac{f}{f_p}(1+\delta)n\right), \quad n=0,1,\dots,M-1$$

przypadającą na parzystą liczbę k okresów napięcia. Następnie próbki $u(n, \delta)$ dzielone są na dwa równoliczne zbiory $u_1(n, \delta)$ dla $n=0,1,\dots,M/2-1$ oraz $u_2(n, \delta)$ dla $n=M/2, M/2+1,\dots,M-1$. Stosując dyskretne przekształcenie Fouriera (DFT) wyznaczamy wartości zespolone podstawowych harmonicznych określonych numerem k z zależności:

$$(3) \quad \bar{X}_{u1}(k, \delta) = \sum_{n=0}^{M/2-1} u(n, \delta) \cdot e^{-j2\pi nk \frac{2}{M}},$$

$$(4) \quad \bar{X}_{u2}(k, \delta) = \sum_{n=M/2}^{M-1} u(n, \delta) \cdot e^{-j2\pi nk \frac{2}{M}}.$$

Różnica argumentów z powyższych funkcji zespolonych jest to przesunięcie fazowe między napięciem $u_1(n, \delta)$ i $u_2(n, \delta)$, które możemy opisać wzorem:

$$(5) \quad \phi(k, \delta) = \arg(\bar{X}_{u2}(k, \delta)) - \arg(\bar{X}_{u1}(k, \delta)).$$

Na podstawie (5) można obliczyć częstotliwość mierzonego napięcia przemiennego ze wzoru:

$$(6) \quad \hat{f}_{DFT_faz} = f \cdot (1 - \tilde{\delta}) = \frac{kf_p}{M} (1 - \tilde{\delta}),$$

gdzie $\tilde{\delta}$ jest to błąd obliczany na podstawie wzoru aproksymującego funkcję odwrotną do (5) ($\tilde{\delta} \approx \phi^{-1}(k, \delta)$) [3]. Przykładowe funkcje aproksymujące stosowane w pracy dla wybranych wartości k i M , przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Wzory do obliczania błędu $\tilde{\delta}$ dla przykładowych wartości k i M .

k	M	$\tilde{\delta}$
2	6	$3,0629E-2\phi^2(2,\delta) + 1,5915E-1\phi(2,\delta) + 3E-15$
10	30	$1,22508E-3\phi^2(10,\delta) + 3,18309E-2\phi(10,\delta) + 3E-13$
10	50	$-4,13671E-4\phi^2(10,\delta) + 3,18309E-2\phi(10,\delta) - 1E-13$
100	300	$1,21623E-5\phi^2(100,\delta) + 3,183E-2\phi(100,\delta) + 3E-11$
100	500	$-4,10676E-6\phi^2(100,\delta) + 3,18304E-3\phi(100,\delta) - 1E-11$

Częstotliwość sygnału można wyznaczyć także na podstawie DFT, biorąc pod uwagę większą liczbę punktów widma. Algorytm AM, umożliwia estymowanie częstotliwości na podstawie dwóch punktów, przy czym lepsze rezultaty osiąga się stosując dodatkowo funkcję okna przed wyznaczeniem widma. Wtedy częstotliwość możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$(7) \quad \hat{f}_{AM} = \frac{f_p}{M} \left[k + H_1 \operatorname{Re}(\overline{K}_{AM}) \right],$$

gdzie

$$(8) \quad \overline{K}_{AM} = \frac{\overline{X}_u(k+0,5;\delta) + \overline{X}_u(k-0,5;\delta)}{\overline{X}_u(k+0,5;\delta) - \overline{X}_u(k-0,5;\delta)},$$

H_1 jest to mnożnik, którego wartość zależy od zastosowanego okna pomiarowego (dla okna Hanninga $H_1 = 1,5$), $\operatorname{Re}(\cdot)$ jest to wartość rzeczywista, $\overline{X}_u(\cdot)$ jest to zespolona transformata Fouriera, którą w badaniach symulacyjnych obliczano na podstawie (3) dla próbek od 0 do M pomnożonych przez funkcję okna Hanninga.

Na podstawie trzech prążków widma można dokonać estymacji częstotliwości z zastosowaniem algorytmu Jacobsona:

$$(9) \quad \hat{f}_J = \frac{f_p}{M} \left[k + H_2 \operatorname{Re}(\overline{K}_J) \right],$$

gdzie

$$(10) \quad \overline{K}_J = \frac{\overline{X}_u(k+1;\delta) + \overline{X}_u(k-1;\delta)}{\overline{X}_u(k-1;\delta) - 2\overline{X}_u(k;\delta) - \overline{X}_u(k+1;\delta)},$$

H_2 jest to mnożnik, który według [5] wynosi 1 dla okna prostokątnego, oraz 2 dla okna Hanninga.

Bardziej złożony, działający także na trzech prążkach widma jest algorytm BKM:

$$(11) \quad \hat{f}_{BKM} = \frac{f_p}{M} \sqrt{\frac{\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}}{\overline{X}_u(k-1;\delta) + \overline{X}_u(k+1;\delta) - 2\overline{X}_u(k;\delta)}},$$

gdzie:

$$(12) \quad \overline{A} = (k - H_3)^2 \overline{X}_u(k-1;\delta),$$

$$(13) \quad \overline{B} = (k + H_3)^2 \overline{X}_u(k+1;\delta),$$

$$(14) \quad \overline{C} = (2H_3^2 - 2H_3 - 2k^2) \overline{X}_u(k;\delta),$$

H_3 jest to współczynnik, który dla okna Hanninga wynosi 2.

W odróżnieniu od wyżej przedstawionych algorytmów, kolejny algorytm zupełnych kwadratów (TLS), nie działa w dziedzinie częstotliwości, tylko w dziedzinie czasu. Jest to algorytm, który minimalizuje zakłócenia ε wektora obserwacji \mathbf{b} , podobnie jak w popularnej metodzie najmniejszych kwadratów, oraz dodatkowo zakłócenia \mathbf{E} macierzy danych \mathbf{A} . Punktem wyjścia algorytmu jest model pomiaru, który opisać można wzorem:

$$(15) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{b} + \varepsilon.$$

Wektor \mathbf{C} jest wynikiem algorytmu TLS, na podstawie której oblicza się wynik estymacji określonej wielkości. W pomiarze częstotliwości wynik estymacji uzyskuje się na podstawie wzoru:

$$(16) \quad \hat{f}_{TLS} = \arccos\left(\frac{\mathbf{C}_0}{2}\right) \frac{f_p}{2\pi}.$$

Szczegółowy sposób definiowania \mathbf{A} , \mathbf{b} i wyznaczania \mathbf{C} w pomiarze częstotliwości opisano w [9].

Wyniki badań symulacyjnych

Badania symulacyjne algorytmów: z pomiarem fazy (DFT_faz), Jacobsona (Jacob), Jacobsona oraz AM z oknem Hanninga (Jacob_okno, AM_okno), BKM i TLS przeprowadzono analizując ich błędy względne

$|\Delta_f / f| = \left| \left(\hat{f} - f \right) / f \right|$ estymacji częstotliwości f dla wpływu

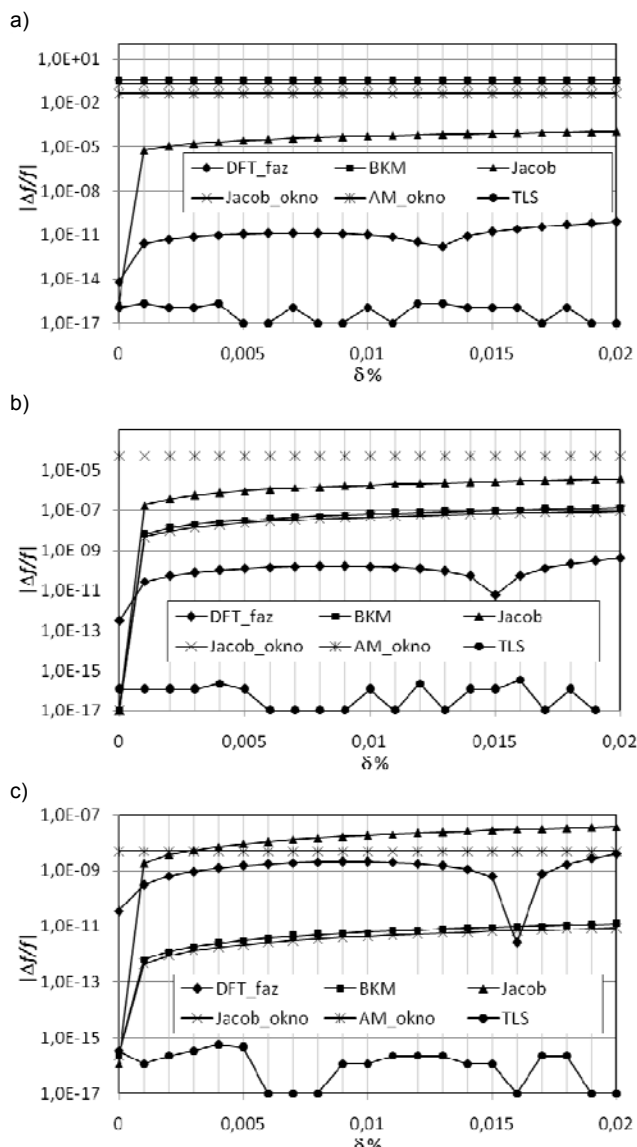
między innymi δ oraz szumu Gaussowskiego dodawanego do próbek napięcia sinusoidalnego. Analizy błędów przeprowadzono dla różnych wartości próbek M i okresów mierzonego napięcia k . W pierwszej kolejności przeprowadzono badania dla wpływu δ (rys. 1). Wyniki wykazały, że algorytm TLS najdokładniej estymuje częstotliwość w przypadku występowania błędu systematycznego δ . Następny w kolejności jest algorytm DFT_faz dla małej liczby próbek ($M = 6$ i $M = 30$), albo Jacob_okno dla dużej liczby próbek ($M = 300$). Wyniki przeprowadzonych badań wykazały także duże znaczenie doboru liczby k mierzonych okresów napięcia. Dla $k = 1$ i większego, prawidłowe działanie wykazał tylko algorytm TLS. Pozostałe algorytmy wymagają $k > 1$, w przeciwnym razie występują duże błędy estymacji częstotliwości. Algorytm DFT_faz wymaga parzystej liczby okresów, ponieważ wyznaczone są dwie transformaty Fouriera podczas jego realizacji. Dla tego algorytmu najmniejsza liczba okresów wynosi 2. Dla $k = 2$ względnie małe błędy estymacji ma także algorytm Jacob (rys. 1.a). Pozostałe algorytmy: Jacob_okno, AM_okno i BKM charakteryzują się dużymi błędami estymacji częstotliwości powyżej 1% (rys. 1.a) i najlepiej stosować je dla $k = 3$ i większego (rys. 1.b, 1.c).

W drugiej kolejności przeprowadzono badania dla wyłącznego wpływu szumu (tabela 2) wyrażanego za pomocą SNR (stosunku sygnału do szumu). Dla SNR w zakresie od 70 do 120 dB najdokładniejszy okazał się algorytm DFT_faz i kolejno Jacob.

W dalszej kolejności przeprowadzono badania symulacyjne dla wpływu łącznego δ oraz szumu (rys. 2), co najbardziej odpowiada warunkom rzeczywistych pomiarów. W tym przypadku najdokładniejszym algorytmem jest DFT_faz dla małej liczby próbek, natomiast dla dużej liczby próbek najdokładniejszy jest algorytm DFT_faz w zakresie SNR od 70 do 105 dB. Powyżej 105 dB najdokładniejsze są Jacob_okno i BKM.

Tabela 2. Maksymalne względne błędy estymacji częstotliwości w funkcji SNR dla $\delta = 0$.

k	M	SNR	$\max\{ \Delta f / f \}$					
			DFT_faz	BKM	Jacob	Jacob_okno	AM_okno	TLS
10	30	120	3,13E-08	4,93E-08	3,34E-08	4,88E-08	5,12E-04	4,23E-08
100	300	70	3,11E-07	5,14E-07	3,61E-07	5,16E-07	4,49E-06	1,09E-06
100	300	95	1,74E-08	2,88E-08	1,88E-08	2,88E-08	2,89E-07	6,47E-08
100	300	120	8,40E-10	1,30E-09	9,27E-10	1,30E-09	6,07E-08	3,87E-09



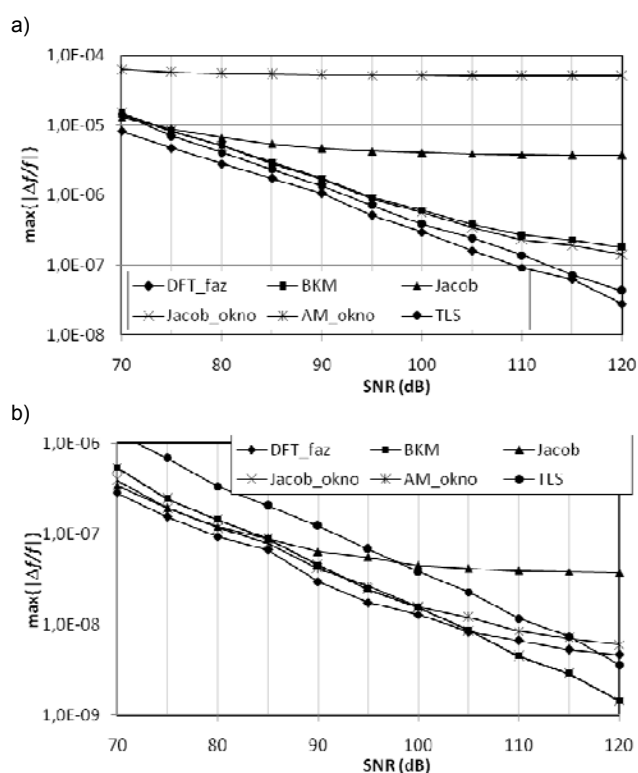
Rys. 1. Względne błędy estymacji częstotliwości w funkcji błędności δ dla: a) $k=2, M=6$, b) $k=10, M=30$, c) $k=100, M=300$.

Właściwości algorytmów do estymacji częstotliwości badano także w warunkach występowania składowej stałej i harmonicznych w mierzonym napięciu. Wielkości te są niepożądane w pomiarach napięć sinusoidalnych. Jednak występują, ze względu na ograniczenia konstrukcyjne źródeł napięć, nawet w dokładnych kalibratorach np. Fluke5730A.

Przeprowadzone badania wykazały, że składowa stała nie ma zauważalnego wpływu na wyniki estymacji częstotliwości żadnego z badanych algorytmów. Badania te przeprowadzono dla różnych wartości $|\delta| \leq 0,02\%$, składowej stałej osiągającej nawet wartości odpowiadające amplitudzie napięcia sinusoidalnego oraz w warunkach prawidłowej pracy wszystkich algorytmów ($k > 2$).

Znaczenie w pomiarach częstotliwości mogą mieć wyższe harmoniczne. Na rys. 3 przedstawiono otrzymane wyniki błędów estymacji częstotliwości dla przykładowego wpływu amplitudy drugiej harmonicznej U_{m2} odniesionej do amplitudy składowej podstawowej U_m analizowanego napięcia. Stosunek tych amplitud można wyrazić współczynnikiem THD (Total Harmonic Distortion):

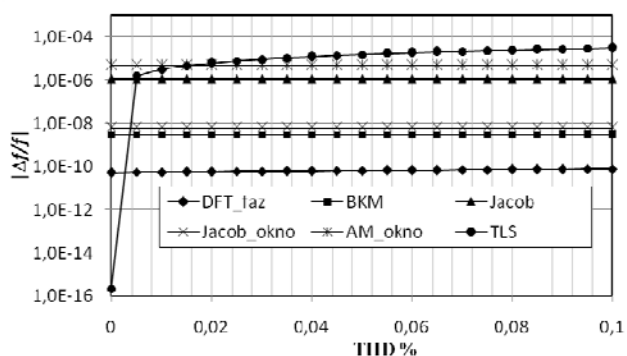
$$(17) \quad \text{THD} = \frac{U_{m2}}{U_m} \cdot 100.$$



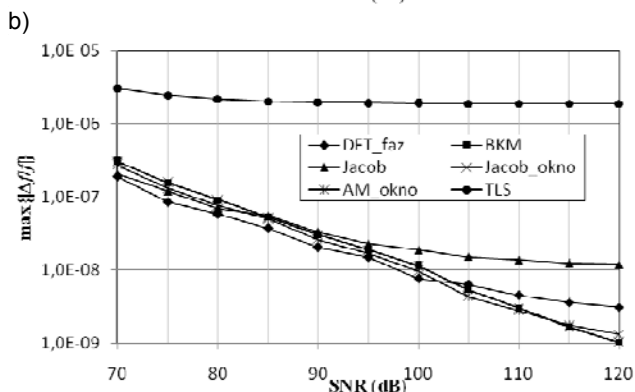
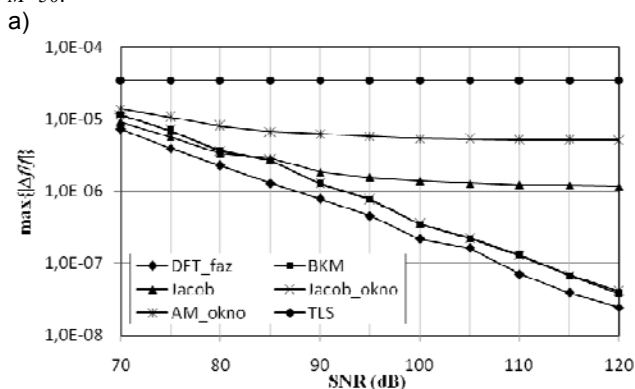
Rys. 2. Maksymalne błędy estymacji f w funkcji SNR dla $\delta = 0,02\%$ oraz: a) $k=10, M=30$, b) $k=100, M=300$.

Wyniki błędów estymacji częstotliwości uzyskano dla $\delta = 0,02\%$, braku szumu oraz zwiększonej, w stosunku do wcześniejszych badań, liczby próbek na okres napięcia sinusoidalnego ($M/k = 5$), aby spełnione było twierdzenie o próbkowaniu. W takim przypadku najdokładniejszym algorytmem okazał się DFT_faz dla małej liczby próbek ($M = 50$, rys. 3) oraz BKM dla dużej liczby próbek ($M = 500$). Wyniki badań wykazały, że wyższa harmoniczna ma bardzo duży wpływ na wyniki algorytmu TLS, natomiast wielokrotnie mniejszy na wyniki pozostałych algorytmów.

Ostatnie badania przeprowadzono dla wpływu łącznego δ , THD oraz szumu (rys. 4). W tym przypadku najlepszym algorytmem jest DFT_faz dla małej liczby próbek, natomiast dla dużej liczby próbek najdokładniejszy jest algorytm DFT_faz w zakresie SNR od 70 do 100 dB. Powyżej 100 dB najlepsze są Jacob_okno, BKM i AM_okno.



Rys. 3. Błędy estymacji f w funkcji THD dla $\delta = 0,02\%$, $k=10$, $M=50$.



Rys. 4. Maksymalne błędy estymacji f w funkcji SNR dla $\delta = 0,02\%$, THD = 0,1% oraz: a) $k=10$, $M=50$, b) $k=100$, $M=500$.

Przedstawione na rys. 2 i 4 wyniki badań wskazują, że algorytm DFT_faz w pewnych przypadkach pomiarowych ustępuje, pod względem dokładności, algorytmom Jacob_okno i BKM. Relacja ta może się zmienić, jeśli zmienimy stopień wielomianu aproksymującego funkcję $\phi^{-1}(k, \delta)$ w algorytmie DFT_faz. Przedstawione powyżej wyniki badań odnoszą się do przypadku stosowania wielomianów drugiego stopnia (tabela 1). Dalsze badania wykazały, że zwiększając stopień wielomianu możemy zwiększyć dokładność estymacji częstotliwości z zastosowaniem algorytmu DFT_faz. W tabeli 3 przedstawiono zestawienie wybranych wyników badań dla algorytmu DFT_faz z zastosowanymi wielomianami stopnia $J = 2$ i $J = 3$ oraz konkurencyjnych algorytmów Jacob_okno i BKM, odnoszące się do przypadków prezentowanych na rys. 2.b i 4.b.

Podsumowanie

Wyniki przeprowadzonych badań symulacyjnych wskazują, że algorytm oparty na DFT z pomiarem fazy (DFT_faz) w warunkach dokładnych pomiarów napięć ma najlepsze właściwości spośród

badanych algorytmów. Pozwala najdokładniej wyznaczyć częstotliwość dla łącznego wpływu błędów i małej liczby próbek. Przy większej liczbie próbek jego przewaga nad pozostałymi algorytmami nie jest znacząca. Należy jednak podkreślić, że dokładność algorytmu DFT_faz można zwiększyć poprzez zwiększenie stopnia wielomianu aproksymującego funkcję $\phi^{-1}(k, \delta)$. Pozostałe algorytmy cechują się także dobrymi właściwościami metrologicznymi, ale zależą one mocno od przypadku pomiarowego.

Tabela 3. Porównanie błędów estymacji algorytmu DFT_faz dla wielomianów δ stopnia J , z błędami algorytmów BKM i Jacob_okno, dla wybranych przypadków z rys. 2.b i 4.b

k	M	SNR dB	THD %	$\max\{ \Delta_f / f \} [x10^{-9}]$			
				DFT_faz		BKM	Jacob_okno
				$J = 2$	$J = 3$		
100	300	120	0	4,6	0,7	1,4	1,4
100	500	120	0,1	3,2	0,6	1	1

Kierunek dalszych badań autorów koncentruje się na opracowaniu algorytmu do bardzo dokładnych pomiarów wartości skutecznej napięcia, który uwzględniłby w swojej strukturze pomiar częstotliwości z zastosowaniem algorytmu DFT_faz.

Autorzy: dr inż. Mariusz Krajewski, Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii, Elektroniki i Informatyki, ul. Szafrana 2, 65-514 Zielona Góra, E-mail: M.Krajewski@imei.uz.zgora.pl; dr inż. Sergiusz Sienkowski, Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii, Elektroniki i Informatyki, ul. Szafrana 2, 65-514 Zielona Góra, E-mail: S.Sienkowski@imei.uz.zgora.pl; dr inż. Elżbieta Kawecka, Akademia im. Jakuba z Paradyża w Gorzowie Wielkopolskim, Wydział Techniczny, ul. Teatralna 25, 66-400 Gorzów Wielkopolski, E-mail: EKawecka@ajp.edu.pl

LITERATURA

- [1] Krajewski M., Constructing an uncertainty budget for voltage RMS measurement with a sampling voltmeter, *Metrologia*, 55 (2018), n. 1, 95–105.
- [2] Kampik M.: Comparison of Nonquantum Methods for Calibration of the Digital Source of Very-Low-Frequency AC Voltage., *IEEE Trans. on Instr. and Meas.*, 62 (2013), n. 6, 1615-1620.
- [3] Krajewski M., Frequency synchronization error correction by using DFT in sinusoidal voltage measurements, *Meas. Autom. Monit.*, 62(2016), n. 07, 218-220.
- [4] Jacobsen E., Kootsookos P., Fast, accurate frequency estimators, *IEEE Signal Processing Magazine*, 24(2007), n. 3, 123-125.
- [5] Belega D., Petri D., Frequency estimation by two- of three-point interpolated Fourier algorithms based on cosine windows, *Signal Processing*, 117(2015), 115-125.
- [6] Ye S., Aboutanious E., Rapid accurate frequency estimation of multiple resolved exponentials in noise, *Signal Processing*, 132(2017), 29-39
- [7] Borkowski J., Kania D., Mroczka J., Interpolated-DFT-Based Fast and Accurate Frequency Estimation for the Control of Power, *IEEE Trans. on Indus. Electronics*, 61 (2012), 7026-7034.
- [8] Wang Y., Wei W., Xiang J., Multipoint interpolated DFT for sine waves in short records with DC components, *Signal Processing*, 131(2017), 161-170.
- [9] Zhang J. Q., Xinmin Z., Xiao H., Jinwei S.: Sinewave fit algorithms based on Total Least-Squares Method with application to ADC effective bits measurement, *IEEE Trans. on Instr. and Meas.*, 46(1997), n. 4, 1026-1030.
- [10] Zieliński T. P., Duda K., Frequency and Damping Estimation Methods - An Overview, *Metrology and Measurement System*, XVIII(2011), n. 4, 505-528.