

Czasowo-dyskretne algorytmy czteropunktowe do śledzenia częstotliwości sygnału sinusoidalnego

Streszczenie. W artykule przedstawiono nowe czasowo-dyskretne algorytmy czteropunktowe umożliwiające śledzenie częstotliwości sygnału sinusoidalnego. Opracowane algorytmy porównano z czasowo-dyskretnym algorytmem trzypunktowym zaproponowanym przez Vizireanu. W celu porównania algorytmów wykonano symulacje polegające na śledzeniu częstotliwości sygnału sinusoidalnego zakłóconego szumem Gaussa. Pokazano, że opracowane algorytmy umożliwiają śledzenie częstotliwości z większą dokładnością.

Abstract. The article presents new discrete-time four-point algorithms that enable tracking the sinusoidal signal frequency. The developed algorithms have been compared with the discrete-time three-point algorithm proposed by Vizireanu. In order to compare the algorithms, simulations have been performed, consisting in tracking the sinusoidal signal frequency disturbed by Gaussian noise. It has been shown that the developed algorithms allow frequency tracking with greater accuracy. (*Discrete-time four-point algorithms for tracking the sinusoidal signal frequency*).

Słowa kluczowe: sygnał sinusoidalny, estymacja częstotliwości, śledzenie częstotliwości.

Keywords: sinusoidal signal, frequency estimation, frequency tracking.

Wstęp

Problematyka estymacji częstotliwości sygnałów jest szeroko komentowana w literaturze. Proponowanych jest wiele algorytmów umożliwiających wyznaczenie częstotliwości [1]. Algorytmy te można podzielić na dwie główne kategorie, tj. algorytmy widmowe i algorytmy czasowe. W artykule zaprezentowano nowe czasowo-dyskretne algorytmy czteropunktowe. Opracowane algorytmy umożliwiają śledzenie częstotliwości sygnału sinusoidalnego z zastosowaniem próbek sygnału. Te same zadanie realizuje czasowo-dyskretny algorytm trzypunktowy Vizireanu [2], prezentowany również przez Solimana [3] i Turnera [4]. Na podstawie algorytmu Vizireanu opracowano inne algorytmy punktowe umożliwiające śledzenie częstotliwości [5]. W literaturze prezentowane są również algorytmy punktowe, które nie wynikają z algorytmu Vizireanu [6, 7]. Z badań własnych wynika, że charakteryzują się one mniejszą dokładnością niż algorytm Vizireanu. W artykule przedstawiono wyniki porównania dokładności wyznaczania częstotliwości z zastosowaniem opracowanych algorytmów i algorytmu Vizireanu. W celu porównania algorytmów wykonano symulacje polegające na śledzeniu częstotliwości sygnału sinusoidalnego zakłóconego szumem Gaussa. Pokazano, że opracowane algorytmy umożliwiają śledzenie częstotliwości z większą dokładnością.

Czasowo-dyskretne algorytmy punktowe do śledzenia częstotliwości

Niech $y(t)$ będzie sumą sygnału sinusoidalnego $x(t)$ o amplitudzie A_s , częstotliwości f , fazie początkowej φ i addytywnego szumu Gaussa $n(t)$ o odchyleniu standardowym σ_n . Wtedy

$$(1) \quad y(t) = x(t) + n(t) = A_s \sin(2\pi f t + \varphi) + n(t).$$

Załóżmy, że $y(t)$ został spróbkowany równomiernie z częstotliwością próbkowania f_s . W wyniku tej operacji otrzymano M próbek

$$(2) \quad y[i] = x[i] + n[i] = A_s \sin\left(2\pi f i \frac{1}{f_s} + \varphi\right) + n[i],$$

$$i = 0..M-1,$$

przypadających na N okresów sygnału $y(t)$.

Oznaczmy przez

$$(3) \quad \text{SNR} = 10 \log\left(\frac{A_s^2 / 2}{\sigma_n^2}\right)$$

wyrażony w decybelach stosunek sygnału $x(t)$ do szumu $n(t)$. Wtedy

$$(4) \quad \sigma_n = \sqrt{\frac{A_s^2}{2} 10^{-\text{SNR}/10}}.$$

Jeżeli przyjmiemy, że szum $n(t)$ jest pomijanie mały, to próbka

$$(5) \quad y[k+1] = c_1 y[k] + c_2 y[k-1], \quad k = 1..M-2,$$

będzie kombinacją liniową dwóch poprzedzających ją próbek sygnału $y(t)$ [8], gdzie:

$$(6) \quad c_1 = 2 \cos\left(2\pi \frac{f}{f_s}\right), \quad c_2 = -1.$$

Jeżeli (5) rozwiążemy względem c_1 , to

$$(7) \quad c_1 = \frac{y[k+1] - c_2 y[k-1]}{y[k]}.$$

Podstawiając (6) do (7) otrzymujemy

$$(8) \quad \cos\left(2\pi \frac{f}{f_s}\right) = \frac{y[k+1] + y[k-1]}{2y[k]}.$$

Jeżeli z (8) wyznaczmy funkcję odwrotną do $\cos(2\pi f/f_s)$, to

$$(9) \quad f_1^{(1)}(k) = \frac{f_s}{2\pi} \arccos\left(\frac{y[k+1] + y[k-1]}{2y[k]}\right)$$

będzie estymatorem częstotliwości f sygnału $x(t)$. Wzór (9) to estymator Vizireanu [2]. Z (9) wynika, że jeżeli $y[k] \neq 0$, to f można wyznaczyć na podstawie trzech kolejnych próbek $y[i]$ sygnału $y(t)$.

Oznaczmy śledzoną częstotliwość f sygnału $x(t)$ przez $f(k)$. Korzystając z (9) można sformułować algorytm trzypunktowy umożliwiający śledzenie $f(k)$.

Algorytm trzypunktowy (Vizireanu):

Krok 1. Przyjąć $k=1$ i uzyskać próbki $y[0], y[1], y[2]$ sygnału $y(t)$. Jeżeli dla ustalonego $\varepsilon>0$ próbka $|y[1]|<\varepsilon$, to przyjąć $f_1^{(1)}(1)=0$. W przeciwnym wypadku oszacować $f(1)$ na podstawie (9).

Krok 2. Przyjąć $k=k+1$ i uzyskać próbki $y[k-1], y[k], y[k+1]$ sygnału $y(t)$. Jeżeli próbka $|y[k]|<\varepsilon$, to przyjąć $f_1^{(1)}(k)=f_1^{(1)}(k-1)$. W przeciwnym wypadku oszacować $f(k)$ na podstawie (9).

Krok 3. Powtarzać krok 2 dopóki $k \leq M-2$.

Rozważmy teraz nowe równanie, w którym próbka

$$(10) \quad y[k+2] = d_1 y[k+1] + d_2 y[k] + d_3 y[k-1], \\ k = 1..M-3,$$

będzie kombinacją liniową trzech poprzedzających ją próbek sygnału $y(t)$, gdzie:

$$(11) \quad d_1 = c_2 + 1, \quad d_2 = c_1^2 - 1, \quad d_3 = -c_1.$$

Jeżeli (11) wstawimy do (10) i otrzymane w ten sposób równanie rozwiążemy względem c_1 , to

$$(12) \quad c_1 = -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

gdzie:

$$(13) \quad A = y[k], \quad B = -y[k-1], \\ C = -y[k] - y[k+2] + (c_2 + 1)y[k+1].$$

Podstawiając (6) do (12) i (13) otrzymujemy

$$(14) \quad \cos\left(2\pi \frac{f}{f_s}\right) = -\frac{B}{4A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{4A},$$

gdzie:

$$(15) \quad A = y[k], \quad B = -y[k-1], \quad C = -y[k] - y[k+2].$$

Równanie (14) można zastąpić wzorem

$$(16) \quad \cos\left(2\pi \frac{f}{f_s}\right) = -\frac{B}{4A} + s_1 \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{4A},$$

gdzie

$$(17) \quad s_1 = \text{sign}(2y[k+1] - B),$$

przy czym

$$(18) \quad \text{sign}(z) = \begin{cases} -1, & z < 0, \\ 0, & z = 0, \\ 1, & z > 0. \end{cases}$$

Jeżeli z (16) wyznaczmy funkcję odwrotną do $\cos(2\pi f/f_s)$, to

$$(19) \quad f_1^{(2)}(k) = \frac{f_s}{2\pi} \text{acos}\left(-\frac{B}{4A} + s_1 \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{4A}\right)$$

będzie estymatorem częstotliwości f sygnału $x(t)$ [9]. Z (19) wynika, że jeżeli $A \neq 0$ oraz $B^2 - 4AC > 0$, to f można estymować na podstawie czterech kolejnych próbek $y[i]$ sygnału $y(t)$.

Korzystając z (19) można sformułować algorytm czteropunktowy umożliwiający śledzenie $f(k)$.

Algorytm czteropunktowy I:

Krok 1. Przyjąć $k=1$ i uzyskać próbki $y[0]..y[3]$ sygnału $y(t)$. Jeżeli dla ustalonego $\varepsilon>0$ próbka $|y[1]|<\varepsilon$ lub $y^2[0] + 4y[1](y[1]+y[3]) \leq 0$, to przyjąć $f_1^{(2)}(1)=0$. W przeciwnym wypadku oszacować $f(1)$ na podstawie (19).

Krok 2. Przyjąć $k=k+1$ i uzyskać próbki $y[k-1]..y[k+2]$ sygnału $y(t)$. Jeżeli $|A|<\varepsilon$ lub $B^2 - 4AC \leq 0$, to przyjąć $f_1^{(2)}(k)=f_1^{(2)}(k-1)$. W przeciwnym wypadku oszacować $f(k)$ na podstawie (19).

Krok 3. Powtarzać krok 2 dopóki $k \leq M-3$.

Równanie (10) jest prawdziwe również, gdy:

$$(20) \quad d_1 = \frac{c_1^2 - 1}{c_1}, \quad d_2 = c_2 + 1, \quad d_3 = -\frac{1}{c_1}.$$

Postacie współczynników d_1, d_2 i d_3 ze wzorów (11) i (20) wynikają z wyprowadzeń wzorów przedstawionych w [9].

Jeżeli (20) wstawimy do (10) i otrzymane w ten sposób równanie rozwiążemy względem c_1 , to

$$(21) \quad c_1 = -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

gdzie:

$$(22) \quad A = y[k+1], \quad B = -y[k+2], \\ C = -A - y[k-1] - \frac{(c_2 + 1)y[k]((c_2 + 1)y[k] + 2B)}{4A}.$$

Podstawiając (6) do (21) i (22) otrzymujemy

$$(23) \quad \cos\left(2\pi \frac{f}{f_s}\right) = -\frac{B}{4A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{4A},$$

gdzie:

$$(24) \quad A = y[k+1], \quad B = -y[k+2], \quad C = -A - y[k-1].$$

Równanie (23) można zastąpić wzorem

$$(25) \quad \cos\left(2\pi \frac{f}{f_s}\right) = -\frac{B}{4A} + s_2 \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{4A},$$

gdzie

$$(26) \quad s_2 = \text{sign}\left(2(y[k-1] + A) \frac{A}{y[k]} + B\right).$$

Jeżeli z (25) wyznaczmy funkcję odwrotną do $\cos(2\pi f/f_s)$, to

$$(27) \quad f_1^{(3)}(k) = \frac{f_s}{2\pi} \text{acos}\left(-\frac{B}{4A} + s_2 \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{4A}\right)$$

będzie estymatorem częstotliwości f sygnału $x(t)$ [9]. Z (27) wynika, że jeżeli $A \neq 0$, $y[k] \neq 0$ oraz $B^2 - 4AC > 0$, to f można estymować na podstawie czterech kolejnych próbek $y[i]$ sygnału $y(t)$.

Korzystając z (27) można sformułować kolejny algorytm czteropunktowy umożliwiający śledzenie $f(k)$.

Algorytm czteropunktowy II:

Krok 1. Przyjąć $k=1$ i uzyskać próbki $y[0]..y[3]$ sygnału $y(t)$. Jeżeli dla ustalonego $\varepsilon>0$ próbka $|y[1]|<\varepsilon$ lub $|y[2]|<\varepsilon$ lub $y^2[3] + 4y[2](y[0]+y[2]) \leq 0$, to przyjąć $f_1^{(3)}(1)=0$. W przeciwnym wypadku oszacować $f(1)$ na podstawie (27).

Krok 2. Przyjąć $k=k+1$ i uzyskać próbki $y[k-1]..y[k+2]$ sygnału $y(t)$. Jeżeli próbka $|y[k]| < \varepsilon$ lub $|A| < \varepsilon$ lub $B^2 - 4AC \leq 0$, to przyjąć $f_1^{(3)}(k) = f_1^{(3)}(k-1)$. W przeciwnym wypadku oszacować $f(k)$ na podstawie (27).

Krok 3. Powtarzać krok 2 dopóki $k \leq M-3$.

Należy zwrócić uwagę, że algorytm Vizireanu ma mniejszą złożoność obliczeniową niż opracowane algorytmy. Oznacza to, że zastosowanie nowych algorytmów będzie uzasadnione, jeśli umożliwią śledzenie $f(k)$ z większą dokładnością niż algorytm Vizireanu. Pokażą to wyniki symulacji.

Wyniki śledzenia częstotliwości

Rozważmy dwie sytuacje pomiarowe. W pierwszym przypadku częstotliwość f sygnału $x(t)$ nie zmienia się w czasie. Oznacza to, że

$$(28) \quad f(k) = f.$$

W drugim przypadku f zmienia się w czasie w ten sposób, że jest modulowana za pomocą sygnału świergotowego

$$(29) \quad m(t) = \frac{k_f}{2} t + f_0^{(m)},$$

gdzie

$$(30) \quad k_f = \frac{f_1^{(m)} - f_0^{(m)}}{T^{(m)}}$$

to głębokość modulacji, natomiast $f_0^{(m)}$, $f_1^{(m)}$ i $T^{(m)}$ to odpowiednio początkowa i końcowa częstotliwość modulacji oraz czas trwania modulacji [5]. Wówczas sygnał $y(t)$ przyjmie postać

$$(30) \quad y(t) = x^{(m)}(t) + n(t),$$

gdzie

$$(31) \quad x^{(m)}(t) = A \cos(2\pi m(t)t + \varphi)$$

to sygnał, dla którego

$$(32) \quad f(k) = \frac{k_f}{f_s} k + f_0^{(m)}.$$

Wyznaczono błędy

$$(33) \quad \Delta^{(1)-(3)}(k) = \left| f_1^{(1)-(3)}(k) - f(k) \right|$$

śledzenia $f(k)$ [2, 5], a na ich podstawie błędy średnie

$$(34) \quad \Delta_{sr}^{(1)-(3)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Delta^{(1)-(3)}(k)$$

i maksymalne

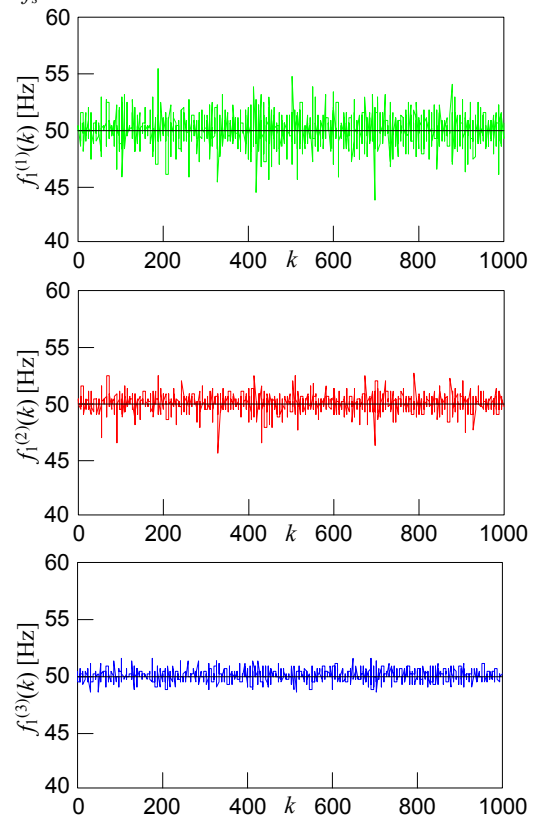
$$(35) \quad \Delta_{maks}^{(1)-(3)} = \max_{1 \leq k \leq K} \left\{ \Delta^{(1)-(3)}(k) \right\},$$

gdzie $K=M-2$ lub $K=M-3$ w zależności od zastosowanego algorytmu.

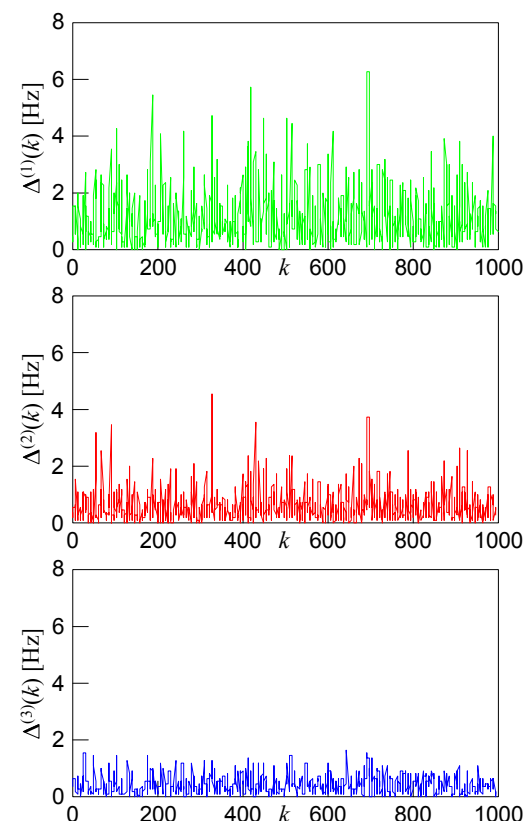
Ilustracją pierwszej sytuacji pomiarowej jest przykład śledzenia częstotliwości (28). Przyjmując $A_s=230$ V, $f=50$ Hz, $\varphi=0$, $f_s=10f=500$ Hz, $M=1000$, $SNR=40$ dB, $\varepsilon=A_s/2$, wyznaczono charakterystyki śledzenia częstotliwości (28) (rys.1) i charakterystyki błędu (33) (rys.2). Na tej podstawie wyznaczono błędy (34) i (35) (tab.1).

Ilustracją drugiej sytuacji pomiarowej jest przykład śledzenia częstotliwości (32). Przyjmując $A_s=230$ V, $\varphi=0$, $f_0^{(m)}=45$ Hz, $f_1^{(m)}=55$ Hz, $T^{(m)}=1$ s, $f_s=550$ Hz, $M=1100$, $SNR=40$

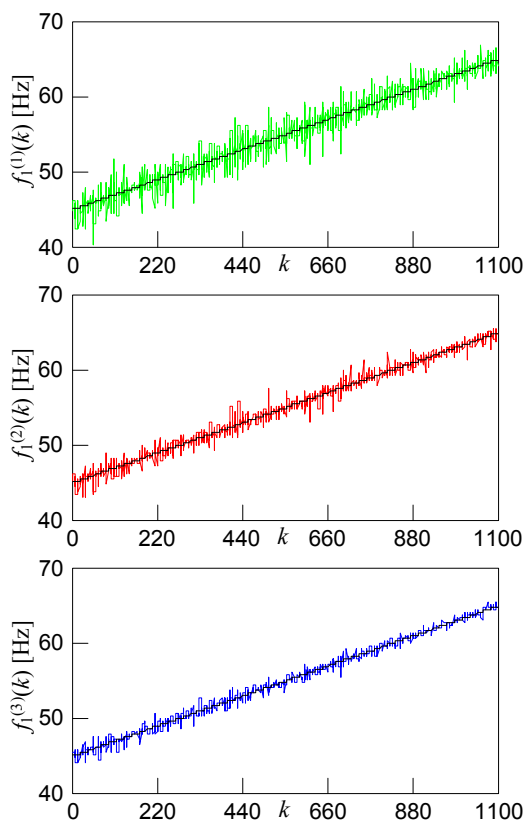
dB, $\varepsilon=A_s/2$, wyznaczono charakterystyki śledzenia częstotliwości (32) (rys.3) i charakterystyki błędu (33) (rys.4). Wartości f_s i M dobrano w ten sposób, że $f_s=10f_1^{(m)}$ i $M=2Tf_s$.



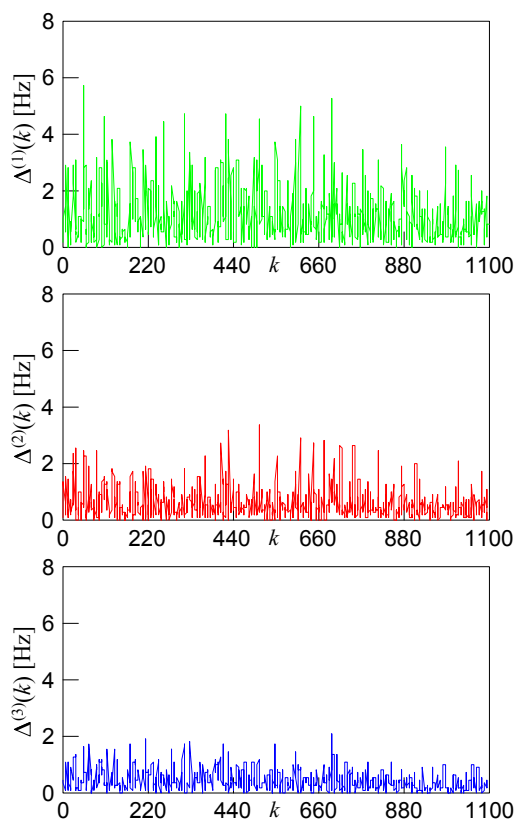
Rys.1. Wyniki śledzenia częstotliwości (28)



Rys.2. Błędy (33) śledzenia częstotliwości (28)



Rys.3. Wyniki śledzenia częstotliwości (32)



Rys.4. Błędy (33) śledzenia częstotliwości (32)

Na podstawie błędów (33) wyznaczono błędy (34) i (35) (tabela 2).

Tabela 1. Błędy (34) i (35) śledzenia częstotliwości (28)

	Algorytm Vizireanu	Algorytm I	Algorytm II
$\Delta_{sr}^{(1)-(3)}$ [Hz]	1,2	0,66	0,46
$\Delta_{maks}^{(1)-(3)}$ [Hz]	6,3	4,6	1,7

Tabela 2. Błędy (34) i (35) śledzenia częstotliwości (32)

	Algorytm Vizireanu	Algorytm I	Algorytm II
$\Delta_{sr}^{(1)-(3)}$ [Hz]	1,2	0,63	0,46
$\Delta_{maks}^{(1)-(3)}$ [Hz]	5,8	3,4	2,2

Przeprowadzone dalsze, własne badania wykazały, że dużą dokładność ($\Delta_{sr}^{(1)-(3)} < 1,2$ Hz) śledzenia $f(k)$ można osiągnąć zapewniając warunki pomiarowe, w których $SNR \gg 40$ dB. Jednak dokładność śledzenia $f(k)$ rośnie nie tylko wraz ze wzrostem SNR, ale również wraz ze wzrostem ε , przy czym błędy $\Delta_{maks}^{(1)-(3)}$ i $\Delta_{sr}^{(1)-(3)}$ maleją, gdy $0 < \varepsilon \leq A_s/2$ i są najmniejsze dla $\varepsilon = A_s/2$. Wyniki symulacji pokazują, że $\Delta_{maks}^{(2),(3)}$ i $\Delta_{sr}^{(2),(3)}$ są wtedy zauważalnie mniejsze od $\Delta_{maks}^{(1)}$ i $\Delta_{sr}^{(1)}$ (tab.1 i 2). Oznacza to, że opracowane algorytmy śledzą $f(k)$ z większą dokładnością.

Podsumowanie

W artykule zaprezentowano nowe czasowo-dyskretne algorytmy czteropunktowe umożliwiające śledzenie częstotliwości sygnału sinusoidalnego. Opracowane algorytmy porównano z czasowo-dyskretnym algorytmem trzypunktowym Vizireanu. Pokazano, że opracowane algorytmy umożliwiają śledzenie częstotliwości z większą dokładnością niż algorytm Vizireanu.

Autorzy: dr inż. Sergiusz Sienkowski, dr inż. Mariusz Krajewski
 Uniwersytet Zielonogórski, Wydział Informatyki, Elektrotechniki i Automatyki, Instytut Metrologii, Elektroniki i Informatyki, ul. Szafrana 2, 65-516 Zielona Góra, E-mail: S.Sienkowski@imei.uz.zgora.pl, M.Krajewski@imei.uz.zgora.pl

LITERATURA

- [1] Zieliński T. P., Duda K., Frequency and Damping Estimation Method - an Overview, *Metrol. Meas. Syst.*, 18 (2011), n.4, 505-528
- [2] Vizireanu D. N., A Fast, Simple and Accurate Time-varying Frequency Estimation Method for Single-phase Electric Power Systems, *Measurement*, 45 (2012), 1331-1333
- [3] Soliman S. A., A Simple and Reliable Algorithm for Frequency Estimation with Application to Power Systems Frequency Relaying, *IEEE LESCOPE*, Montreal, 2007, 154-158
- [4] Lyons R., Sinusoidal Frequency Estimation Based on Time-domain Samples, *DSPrelated.com*, July, 2017, www.dsprelated.com/showarticle/1045.php
- [5] Pan X., Zhao H., Zou W. et al., Frequency Estimation of Discrete Time Signals Based on Fast Iterative Algorithm, *Measurement*, 82 (2016), 461-465
- [6] Seyedi H., Sanaye-Pasand M., A New Time-domain Based Power System Frequency Estimation Algorithm, *Euro. Trans. Electr. Power*, 22 (2011), n.4, 433-448
- [7] Roustaei M., Seyedi H., Hashemi S. M., A New Approach to Power System Frequency Estimation, *07th Power Systems Protection & Control Conference*, 2012
- [8] Duda K., Zieliński T. P., Efficacy of the Frequency and Damping Estimation of a Real-value Sinusoid, *IEEE Instrum. Meas. Mag.*, 16 (2013), n.2, 48-58
- [9] Sienkowski S., Krajewski M., Simple, Fast and Accurate Four-point Estimators of Sinusoidal Signal Frequency, *Metrol. Meas. Syst.*, 25 (2018), n.2, 359-376