

doi:10.15199/48.2018.01.06

Zastosowanie formalizmu Hamiltona do modelowania układów energetycznych z silnikami synchronicznymi o podatnej transmisji ruchu

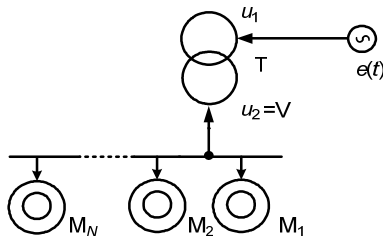
Streszczenie. W pracy rozpatrywano zasady interdyscyplinarnego modelowania procesów nieustalonych w zespole elektrycznym. Składa się on z napędów z silnikami synchronicznymi o złożonej transmisji ruchu, które są zasilane z transformatora mocy. Wały napędowe silników przedstawiono jako ciągły układ o rozłożonych parametrach mechanicznych z uwzględnieniem sprężystości układu transmisji ruchu. Równania stanu elektrycznego oraz dyskretyzowane równania stanu mechanicznego przedstawiono w postaci Cauchy'ego, które rozwiązano wykorzystując metody numeryczne. Wyniki symulacji komputerowej przedstawiono w postaci graficznej.

Abstract. In the paper the principles of interdisciplinary modelling of transient processes in an electrical set are considered. This electrical set consists of synchronous motors with a complex transmission of mechanical power and power transformer which energizes the motors. Transmission shafts of the motors are described as the system with the continuously distributed mechanical parameters taking into account the elasticity of transmission of mechanical power. Equations of electrical state and digitized equations of mechanical state are given in Cauchy's form and solved using numerical methods. Results of computer simulations are presented in a graphic form. (The use of the Hamilton formalism for modelling of power systems with a synchronous motors and susceptible transmission of mechanical power).

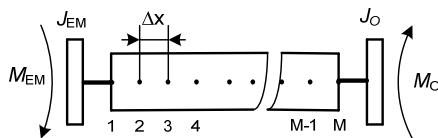
Słowa kluczowe: zasada Hamiltona, Euler-Lagrange'a system, zespół elektryczny, silnik synchroniczny
Keywords: Hamilton principle, Euler-Lagrange's system, electrical set, synchronous motor

Wstęp

Do sformułowania ogólnego modelu zespołu elektrycznego wykorzystano interdyscyplinarną metodę wariacyjną, która wykorzystuje modyfikację zasady Hamiltona [1, 2]. W pracy przedstawiono model matematyczny układu elektromaszynowego, który składa się z N napędów synchronicznych o podatnej transmisji ruchu, które są zasilane z transformatora mocy. Na rysunku 1 przedstawiono schemat elektryczny analizowanego obiektu (zespół elektryczny), a na rysunku 2 schemat części mechanicznej wału napędowego silników synchronicznych.



Rys. 1. Schemat zespołu elektrycznego



Rys.2. Schemat części mechanicznej wału napędowego silników synchronicznych

Model matematyczny układu

Model matematyczny zespołu elektrycznego, który składa się ze źródła energii, transformatora mocy, N napędów synchronicznych o złożonej transmisji ruchu sformułowano wykorzystując funkcję lagrangianu [1, 2]:

$$(1) \quad L^* = \tilde{T}^* - P^* + \Phi^* - D^*,$$

gdzie L^* – zmodyfikowana funkcja Lagrange'a, \tilde{T}^* – koenergia kinetyczna, P^* – energia potencjalna, Φ^* – energia dyssypacji, D^* – energia sil zewnętrznych [1, 2].

Dla układów o parametrach zarówno skupionych jak i rozproszonych zasada Hamiltona przybiera następującą postać [1]:

$$(2) \quad \delta S = \delta \int_0^{t_1} \left(L^* + \int_l L_l dl \right) dt = \int_0^{t_1} \delta L^* dt + \int_0^{t_1} \int_l \delta L_l dl dt,$$

gdzie L_l – gęstość liniowa funkcji Lagrange'a

W jakości uogólnionych współrzędnych wykorzystano ładunki w uzwojeniach (stożana i wirnika) silników. Dla stojanów: $q_{(1-3),k} = Q_{SA,k}, Q_{SB,k}, Q_{SC,k}$ dla wirników: $q_{(4-6),k} = Q_{D,k}, Q_{Q,k}, Q_{f,k}$. Następnie, ładunki elektryczne w uzwojeniach transformatora $q_{(7-12)} = Q_{1A}, Q_{1B}, Q_{1C}, Q_{2A}, Q_{2B}, Q_{2C}$, i: $q_{(13,14),k} = \gamma_1, \gamma_N$ – kąty obrotu wirników oraz mas wirujących wszystkich napędów, $k = 1, 2, \dots, N$, a także kąty obrotu elementów wałów napędowych maszyn synchronicznych: $q(x,t)_k = \varphi(x,t)_k$. W jakości uogólnionych prędkości: odpowiednio prądy w wymienionych uzwojeniach oraz prędkości kąto- odpowiednich mas: $\dot{q}_{(1-3),k} = i_{SA,k}, i_{SB,k}, i_{SC,k}$, $\dot{q}_{(4-6),k} = i_{D,k}, i_{Q,k}, i_{f,k}$, $\dot{q}_{(7-12)} = i_{1A}, i_{1B}, i_{1C}, i_{2A}, i_{2B}, i_{2C}$, $\dot{q}_{(13,14),k} = \omega_1, \omega_N$, $\dot{q}(x,t)_k = \omega(x,t)_k$. Przy tych założeniach elementy zmodyfikowanego lagrangianu dla układu elektroenergetycznego z rysunków 1 i 2 przyjmują następującą postać:

$$(3) \quad \tilde{T}^* = \tilde{T}_E^* + \tilde{T}_M^* = \sum_{j=1}^3 \left(\int_0^{i_{1j}} \Psi_{1j} di_{1j} + \int_0^{i_{2j}} \Psi_{2j} di_{2j} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^3 \int_0^{i_{Sj,k}} \Psi_{Sj,k} di_{Sj,k} + \int_0^{i_{Dk}} \Psi_{D,k} di_{D,k} + \int_0^{i_{Qk}} \Psi_{Q,k} di_{Q,k} + \int_0^{i_{f,k}} \Psi_{f,k} di_{f,k} + \frac{J_{EM,k} \omega_{1,k}^2}{2} + \frac{J_{O,k} \omega_{N,k}^2}{2} \right),$$

$$(4) \quad \Phi^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \int_0^t (r_{1j} i_{1j}^2 + r_{2j} i_{2j}^2) d\tau + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left[\sum_{j=1}^3 \int_0^t r_{Sj,k} i_{Sj,k}^2 d\tau + \int_0^t r_{D,k} i_{D,k}^2 d\tau + \int_0^t r_{Q,k} i_{Q,k}^2 d\tau + \int_0^t r_{f,k} i_{f,k}^2 d\tau \right],$$

$$(5) \quad D^* = \sum_{j=1}^3 \int_0^t (u_{1j} i_{1j} + u_{2j} i_{2j}) d\tau + \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^3 \int_0^t u_{2j} i_{Sj,k} d\tau + \int_0^t u_{f,k} i_{f,k} d\tau - \int_0^{\omega_k} M_O(\omega_k) d\omega_k d\tau \right), \quad P^* = 0, \quad j = A, B, C,$$

$$(6) \quad T_l = \sum_{k=1}^N \frac{\rho_k J_{p,k}}{2} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \right)^2, \quad P_l = \sum_{k=1}^N \frac{G_k J_{p,k}}{2} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \right)^2, \\ \Phi_l = \sum_{k=1}^N \frac{\xi_k}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x \partial t} \right)^2, \quad D_l = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie: $\tilde{T}_E^* + \tilde{T}_M^*$ – koenergia (elektryczna + mechaniczna), Ψ_1, Ψ_2 – wektory kolumnowe sprzężeń magnetycznych pierwotnej i wtórnej strony uzwojeń transformatora, r_1, r_2 – macierze rezystancji pierwotnej i wtórnej strony uzwojeń trafo, i_1, i_2 – wektory kolumnowe prądów pierwotnej i wtórnej strony, u_1, u_2 – wektory kolumnowe napięć pierwotnej i wtórnej strony transformatora, odpowiednio z indeksami S, R, f, D, Q to samo, tylko stosownie do uzwojeń wszystkich silników synchronicznych, $M_{EM,k}$ – momenty elektromagnetyczne silników, $M_{O,k}$ – momenty obciążenia silników, $\rho_k, J_{p,k}, G_k, \xi_k$ – parametry mechaniczne wałów napędowych. Rozwiązując zależność (2), a także biorąc pod uwagę równanie (7):

$$(7) \quad M_{EM,k} = \frac{\partial [\tilde{T}_E^*]}{\partial \gamma_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

otrzymano równania ekstremali funkcjonału.

$$(8) \quad \frac{d\Psi_1}{dt} = u_1 - r_1 i_1, \quad \frac{d\Psi_2}{dt} = u_2 - r_2 i_2,$$

$$(9) \quad \frac{d\Psi_{S,k}}{dt} = u_2 - r_{S,k} i_{S,k}, \quad \frac{d\Psi_{R,k}}{dt} = u_{R,k} - r_{R,k} i_{R,k}, \quad u_{R,k} \equiv \begin{bmatrix} \phantom{u_{R,k}} \\ \phantom{u_{R,k}} \\ \phantom{u_{R,k}} \\ u_{f,k} \end{bmatrix},$$

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial t^2} = \frac{G_k}{\rho_k} \frac{\partial^2 \Phi_k(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\xi_k}{\rho_k J_{p,k}} \frac{\partial^2 \omega_k(x,t)}{\partial x^2},$$

$$(11) \quad \frac{\partial \Phi_k(x,t)}{\partial t} = \omega_k(x,t), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Do wyznaczenia warunków brzegowych równania (10), rys. 2 wykorzystano zależności (12) i (13):

$$(12) \quad J_{EM,k} \frac{d\omega_{1,k}}{dt} = M_{EM,k} - M_{SP1,k} - M_{DP1,k},$$

$$(13) \quad J_{O,k} \frac{d\omega_{M,k}}{dt} = M_{DPM,k} + M_{SPM,k} - M_{O,k}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie: $M_{SP1,k}, M_{SPM,k}$ – momenty sprężystości, wynikające w pierwszym i ostatnim elemencie dyskretyzacji wała, $M_{DP1,k}, M_{DPM,k}$ – momenty dyssypacji w wymienionych elementach, M – liczba węzłów przestrzennej dyskretyzacji układu transmisji ruchu.

Po dokonaniu niezbędnych przekształceń matematycznych przedstawionych w [1, 7], równania części elektrycznej wszystkich elementów we współrzędnych prądów opisują zależności:

$$(14) \quad \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} = \mathbf{A}_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{r}_1 \mathbf{i}_1) + \mathbf{A}_{12}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_2 \mathbf{i}_2),$$

$$(15) \quad \frac{d\mathbf{i}_2}{dt} = \mathbf{A}_{21}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{r}_1 \mathbf{i}_1) + \mathbf{A}_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_2 \mathbf{i}_2),$$

$$(16) \quad \frac{d\mathbf{i}_{S,k}}{dt} = \mathbf{A}_{S,k}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_{S,k} \mathbf{i}_{S,k} - \mathbf{\Omega}_{1,k} \Psi_{S,k}) + \mathbf{A}_{SR,k}(\mathbf{u}_{R,k} - \mathbf{r}_{R,k} \mathbf{i}_{R,k}) + \mathbf{\Omega}_{1,k} \mathbf{i}_{S,k},$$

$$(17) \quad \frac{d\mathbf{i}_{R,k}}{dt} = \mathbf{A}_{RS,k}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_{S,k} \mathbf{i}_{S,k} - \mathbf{\Omega}_{1,k} \Psi_{S,k}) + \mathbf{A}_{R,k}(\mathbf{u}_{R,k} - \mathbf{r}_{R,k} \mathbf{i}_{R,k}),$$

gdzie $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_2$ – współczynniki, które zależą od indukcyjności rozproszenia i magnesowania transformatora, $\mathbf{A}_{S,k}, \mathbf{A}_{SR,k}, \mathbf{A}_{RS,k}, \mathbf{A}_{R,k}$ – to samo, tylko dla silników synchronicznych, $\mathbf{\Omega}_{1,k}$ – macierze prędkości kątowej silników synchronicznych, które wyznaczono na podstawie prostej i odwrotnej macierzy Parka ($\mathbf{\Pi}_{1,k}, \mathbf{\Pi}_{1,k}^{-1}$) [1, 4].

Wyrażenia opisujące strumienie skojarzone, które figurują w równaniach (16), (17) mają postać [1]:

$$(19) \quad \Psi_{S,k} = L_{oS,k} \mathbf{i}_{S,k} + \mathbf{\Pi}_{1,k}^{-1} \tau_k^{-1} (\mathbf{\Pi}_{1,k} \mathbf{i}_{S,k} + \mathbf{B}^T \mathbf{i}_{R,k}),$$

gdzie: \mathbf{B} – macierz topologiczna.

Następnie wyznaczono napięcie węzła ($\mathbf{u}_2 \equiv \mathbf{V}$). Na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa dla zespołu obciążenia, rys. 1 można zapisać:

$$(20) \quad \mathbf{i}_2 + \sum_{k=1}^N \mathbf{i}_{S,k} = 0.$$

Różniczkując po czasie równanie (20) z uwzględnieniem wpływu warunków początkowych [1] oraz równań (14) – (17) otrzymano

$$(21) \quad \frac{d\mathbf{i}_2}{dt} + \sum_{k=1}^N \frac{d\mathbf{i}_{S,k}}{dt} = \mathbf{A}_{21}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{r}_1 \mathbf{i}_1) + \mathbf{A}_{22}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_2 \mathbf{i}_2) + \sum_{k=1}^N \left[\mathbf{A}_{S,k}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_{S,k} \mathbf{i}_{S,k} - \mathbf{\Omega}_{1,k} \Psi_{S,k}) + \mathbf{A}_{SR,k}(\mathbf{u}_{R,k} - \mathbf{r}_{R,k} \mathbf{i}_{R,k}) + \mathbf{\Omega}_{1,k} \mathbf{i}_{S,k} \right] = 0.$$

Skąd, uzyskano poszukiwane napięcie zespołu obciążenia:

$$(22) \quad \mathbf{u}_2 \equiv \mathbf{V} = \left\{ \mathbf{A}_{22} + \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_{S,k} \right\}^{-1} \left\{ \mathbf{A}_{22} \mathbf{r}_2 \mathbf{i}_2 - \mathbf{A}_{21}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{r}_1 \mathbf{i}_1) - \sum_{k=1}^N \left[\mathbf{A}_{S,k}(-\mathbf{r}_{S,k} \mathbf{i}_{S,k} - \mathbf{\Omega}_{1,k} \Psi_{S,k}) + \mathbf{A}_{SR,k}(\mathbf{u}_{R,k} - \mathbf{r}_{R,k} \mathbf{i}_{R,k}) + \mathbf{\Omega}_{1,k} \mathbf{i}_{S,k} \right] \right\}.$$

Momenty elektromagnetyczne rozwijane przez poszczególne silniki obliczono na podstawie zależności (23) [7]:

$$(23) \quad M_{EM,k} = \sqrt{3} p_{0,k} (\Psi_{SB,k} i_{SA,k} - \Psi_{SA,k} i_{SB,k}).$$

gdzie: p_0 – liczba par biegunów maszyn.

Następnie podstawiając do równania (10) wyznaczono warunki brzegowe, uwzględniając równania (12), (13)

$$(24) \quad M_{EM,k} + G_k J_{p,k} \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right|_{x=0} + \xi_k \left. \frac{\partial \omega_k}{\partial x} \right|_{x=0} = J_{EM,k} \left. \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} \right|_{x=0},$$

$$(25) \quad G_k J_{p,k} \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right|_{x=l_0} + \xi_k \left. \frac{\partial \omega_k}{\partial x} \right|_{x=l_0} - M_{O,k} = J_{O,k} \left. \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} \right|_{x=l_0}.$$

Dyskretyzując metodą prostych równanie (10) oraz umowy brzegowe (24), (25) otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych opisujący układ mechaniczny mechaniczny:

$$(26) \quad \frac{d\omega_{1,k}}{dt} = 2 \frac{\Delta x_k M_{EM,k} - J_{p,k} G_k (\varphi_{1,k} - \varphi_{2,k})}{(\rho_k J_{p,k} \Delta x_k + 2J_k) \Delta x_k} - 2 \frac{\xi_k (\omega_{1,k} - \omega_{2,k})}{(\rho_k J_{p,k} \Delta x_k + 2J_k) \Delta x_k},$$

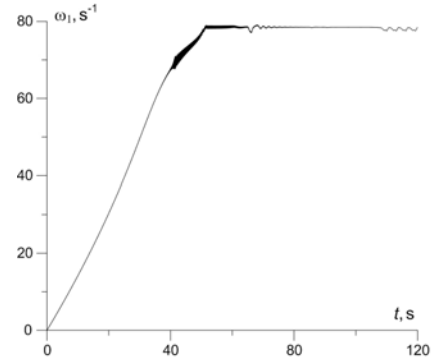
$$(27) \quad \frac{d\omega_{j,k}}{dt} = \frac{\xi_k}{\rho_k J_{p,k} (\Delta x_k)^2} (\omega_{j-1,k} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j+1,k}) + \frac{G_k}{\rho_k (\Delta x_k)^2} (\varphi_{j-1,k} - 2\varphi_{j,k} + \varphi_{j+1,k}), \quad j = 2, \dots, M-1,$$

$$(28) \quad \frac{d\omega_{M,k}}{dt} = 2 \frac{J_{p,k} G_k (\varphi_{M-1,k} - \varphi_{M,k}) + \xi_k (\omega_{M-1,k} - \omega_{M,k})}{(\rho_k J_{p,k} \Delta x_k + 2J_k) \Delta x_k} - 2 \frac{\Delta x_k M_{O,k}}{(\rho_k J_{p,k} \Delta x_k + 2J_k) \Delta x_k}, \quad k = 1, \dots, N.$$

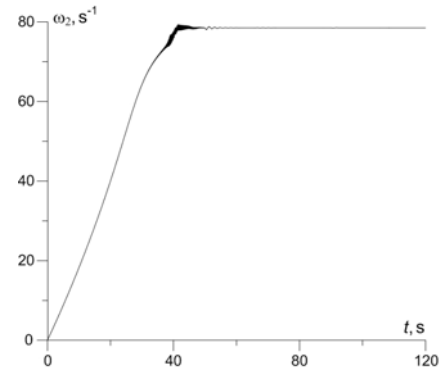
W modelu matematycznym wspólnemu całkowaniu podlega układ równań różniczkowych: (14) – (17), (26) – (28) z uwzględnieniem wyrażen (22), (23).

Wyniki symulacji komputerowej

Dane mechaniczne układu następujące: $J_{EM} = 1700 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_{o,1} = 3000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_{o,2} = 2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $M_{o,1} = 5600 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_{o,2} = 4400 \text{ N} \cdot \text{m}$. Długie wały napędowe dla obu silników były jednakowej grubości: $d = 25,0 \text{ cm}$, natomiast długości są różne: $l_{o,1} = 4,5 \text{ m}$ i $l_{o,2} = 3,0 \text{ m}$.

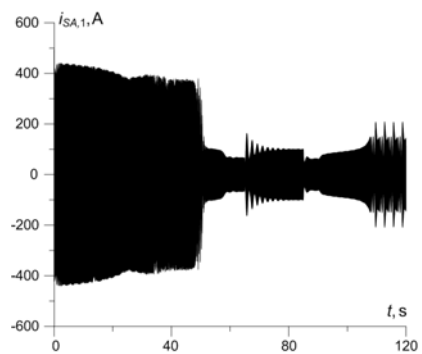


Rys.3. Przebieg czasowy prędkości kątowej wirnika pierwszego silnika synchronicznego

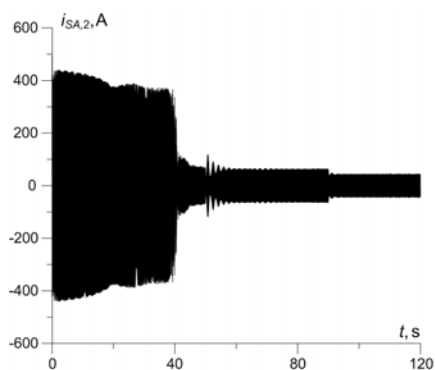


Rys.4. Przebieg czasowy prędkości kątowej wirnika drugiego silnika synchronicznego

Rysunki 3 i 4 przedstawiają przebiegi czasowe prędkości kątowych wirników obu maszyn synchronicznych. Analizując przedstawione rysunki można zauważyć, że na pierwszym z nich drgania prędkości pojawiają się w momencie włączenia stałego napięcia na uzwojenie wzbudzenia z jednoczesnym włączeniem aktywnych momentów obciążeń oraz w momencie istotnego zmniejszenia napięcia wzbudzenia.

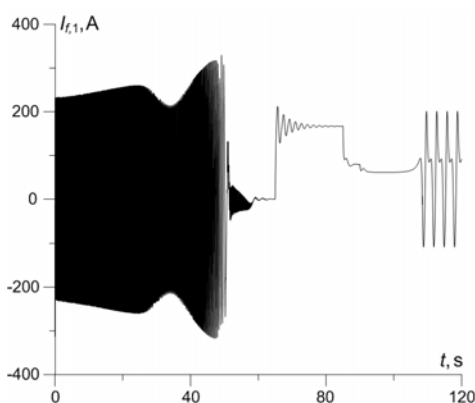


Rys. 5. Przebieg czasowy prądu fazy A twornika pierwszego silnika

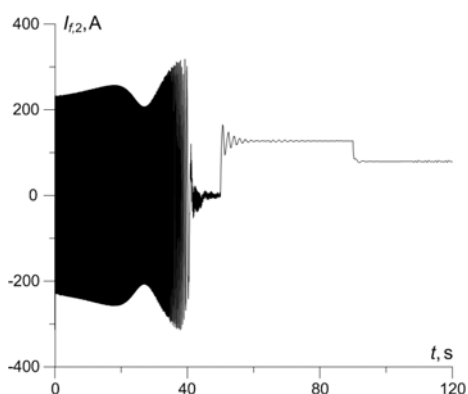


Rys. 6. Przebieg czasowy prądu fazy A twornika drugiego silnika

W rysunkach 5 i 6 przedstawiono przejściowe prądy w uzwojeniach tworników obu maszyn napędowych.. Analizując przebieg symulacji pracy ruchu pierwszego napędu, można zauważyć, że dla pierwszego silnika wzrost prądu odbył się w czasie $t=65$ s, czyli w momencie załączenia wzbudzenia i obciążenia. Kolejne zmiany prądu wynikały z różnego rodzaju zmiany napięcia wzbudzenia obu maszyn.

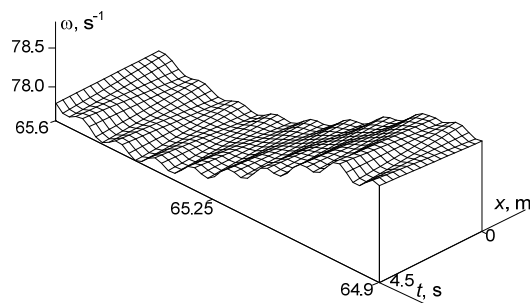


Rys.7. Przebieg czasowy prądu wzbudzenia wirnika pierwszego silnika



Rys.8. Przebieg czasowy prądu wzbudzenia wirnika drugiego silnika

Następna para rysunków, 7 i 8 przedstawia przebiegi czasowe prądów wzbudzenia w uzwojeniach wirników obu maszyn. Zilustrowano na nich czasowe diagramy zmiany napięć wzbudzenia obu maszyn synchronicznych. Wprowadzenie maszyny w stan bliski do wypadnięcia z synchronizmu prowadzi do istotnych oscylacji funkcji prądu wzbudzenia, co potwierdza niestabilną pracę maszyn w wymienionych stanach. Także widać oscylację w funkcji prądu wzbudzenia w drugim silniku, ale w mniejszym stopniu.



Rys.9. Rozkład przestrzenno-czasowy prędkości kątowej wału napędowego silnika nr 1

Na rysunku, 9 przedstawiono przestrzenno-czasowy rozkład dwuwymiarowej funkcji prędkości kątowej wału napędowego pierwszego silnika w przedziale czasowym $t \in [64,9; 65,6]$ s (czas włączenia wzbudzenia silnika i jego obciążenia). Z punktu widzenia użytkownika to ten rysunek niesie najwięcej informacji o stanie układu napędowego ponieważ daje on informacje o ruchu wszystkich punktów dyskretyzowania.

Wnioski

Na podstawie wyników symulacji komputerowej możemy wyciągnąć następujące wnioski: zwiększenie napięcia wzbudzenia do wartości znamionowych silników synchronicznych prowadzi do wzrostu (stabilizacji) napięcia węzła zasilania, nieprawidłowo zaprojektowane wały napędów elektrycznych mogą doprowadzić do wzrostu momentów sprężystości (dzięki procesom rezonansowym lub bliskim rezonansu), co z kolei może doprowadzić do zniszczenia całego układu.

Autorzy: dr hab. inż. Andriy Czaban prof. UTH, Uniwersytet Technologiczno – Humanistyczny, Wydział Transportu i Elektrotechniki, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, e-mail: atchaban@gmail.com, dr hab. inż. Marek Lis prof. PCz., Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 17, e-mail: lism@el.pcz.czyst.pl.

LITERATURA

- [1] Czaban A. Zasada Hamiltona-Ostrogradskiego w układach elektromechanicznych, Lwów: *W-wo T. Soroki* 2015
- [2] Czaban A., Lis M. Model matematyczny i analiza układu napędowego silnika indukcyjnego z długim elementem sprężystym dla parametrów rozłożonych *Prace naukowe IMNPT Politechniki Wrocławskiej*, Nr 66, 2012, 224 – 229
- [3] Rusek A., Chaban A., Lis M. Modelowanie matematyczne procesów oscylacyjnych w linii wałów o parametrach rozłożonych // *Технічні віснi.* – 2011/1(33), 2(34), 66 – 68
- [4] Lis M. Modelowanie matematyczne procesów niustalonych w elektrycznych układach napędowych o złożonej transmisji ruchu. *W-wo Politechniki Częstochowskiej*, 2013
- [5] Rusek A. Stany dynamiczne układów napędowych z silnikami indukcyjnymi specjalnego wykorzystania. Monografia. *W-wo Politechniki Częstochowskiej*, Częstochowa, 2012
- [6] White D.C., Woodson H.H. Electromagnetic Energy Conversion, New-York, *John Wiley & Sons, Inc*, 1958
- [7] Чабан В. И. Методы анализа электромеханических систем, Львов: *Вища школа*, 1985, 192
- [6] Popenda A. Mathematical Modelling of Real Transmission Shafts and Mechanical Connections with Clearances, *Przegląd Elektrotechniczny* nr 1, 2017, 189-192
- [7] Popenda A. Simple Mathematical Models of Transmission Shafts and Gear Trains. Electrical and Mechanical Circuits, *Przegląd Elektrotechniczny* nr 12, 2016, 137-140