

doi:10.15199/48.2017.05.11

Strata minimalna i nadmiarowa w linii układu trójfazowego stowarzyszone z przepływem strumieni mocy pulsującej i oscylującej w dziedzinie czasu jako podstawa nowej interpretacji fizycznej i ekonomicznej kompensacji mocy biernej..

Streszczenie: W artykule przedstawiono rozszerzenie koncepcji Fryzego w teorii mocy prądów niesinusoidalnych w analizie układów trójfazowych. Wymagany postulat Fryzego ujęcia zagadnień w dziedzinie czasu pozwala na efektywne sformułowanie ogólnych metod obliczeniowych dowolnego odbiornika 3-fazowego (liniowego lub nieliniowego, symetrycznego lub asymetrycznego). Wprowadzono dla odbiornika 3-fazowego zastępcze komponenty w postaci rezystancyjnej gwiazdy symetrycznej (układ czynny) oraz cztero-bieguna zupełnego (układ bierny). Proponowane rozszerzenie w niewielkim stopniu zmienia obliczenia w stosunku do układów jednofazowych. Uzyskuje się naturalną prostą interpretację fizyczną i ekonomiczną wyników analogiczną do wyników znanych z obwodów jednofazowych sinusoidalnych. Rozpatrzone przykłady ilustrujące zastosowanie prezentowanej metody

Abstract: The article presents the extension of the concept of Fryze of power theory of non-sinusoidal currents in the analysis of three-phase systems. Required postulate Fryze approach to the issues in the time domain allows for efficient calculation methods to formulate general any receiver 3-phase (linear or non-linear, symmetric or asymmetric). Introduced for the receiver 3-phase replacement resistive components in the form of a star symmetrical (active system) and four-pole complete (passive system). The proposed extension varies slightly with respect to the calculation of the single-phase systems. Obtained by simple physical interpretation of natural and economical results similar to the results known from single-phase sinusoidal circuits. Considered examples illustrating the application of the presented method. **Minimum and excess losses of in three-phase systems associated with the of power flux pulsating and oscillating in time domain as the basis for the interpretation of physical and economic reactive power**

Słowa kluczowe: teoria mocy, prądy niesinusoidalne, moc bierna, kompensacja, układy trójfazowe

Keywords: power theory, nonsinusoidal current, reactive power, compensation, three-phase systems

Motto:

„Dla zrozumienia całości istoty rzeczy należy ją uporządkować eliminując części zbędne. Kopernik zrozumiał mechanikę nieba wpiers ją porządkując.”

Wprowadzenie

Obecnie mija już prawie 85 lat od powstania zasadniczych zrębów teorii mocy prądów odkształconych (niesinusoidalnych). Uznany prekursorem sformułowania podstawowych koncepcji dotyczących szeroko pojętej teorii mocy był prof. Stanisław Fryze [9, 10].

Aktualnie nadal ważnym teoretycznie i aplikacyjnie problemem jest prawidłowe sformułowanie metod obliczeniowych w aspekcie rozwiązywania praktycznych zagadnień energetyki. Potwierdzeniem tendencji wzrostu zainteresowania jest lawinowo rosnąca bibliografia opracowań dotycząca tej tematyki. Naszym zdaniem w publikacjach nie jest jednak wykorzystany główny postulat idei Fryzego jakim jest wymóg pełnego sformułowania metod analizy w dziedzinie czasu. Uważamy, że właśnie z tego względu przedstawiane dotychczas metody nie charakteryzują się wystarczającą ogólnością ujęcia wymaganą w zastosowaniach praktycznych. Dlatego zakres ich wykorzystania wydaje się zawężony.

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie metod analizy z uwzględnieniem koncepcji Fryzego w postulowanej wersji pierwotnej ale w nowej rozszerzonej formie przystosowanej do analizy dowolnego odbiornika trójfazowego 4-przewodowego. Przy uwzględnieniu naszych wcześniejszych opracowań [1, 2, 12, 13] rozważana metoda umożliwi sformułowanie procedury obliczeniowej dla dowolnego odbiornika trójfazowego liniowego, nieliniowego, symetrycznego, niesymetrycznego i dowolnie odkształconego przebiegu napięć zasilania.

Zasadnicza tematyka przedstawiona w niniejszym opracowaniu zgodna jest z głównym kierunkiem prezentowanym w artykule [15]. Różnice dotyczą sposobu

ujęcia a szczególnie metod rozwiązania przedstawionych problemów.

W celu ilustracji oraz interpretacji fizycznej procesów energetycznych w niniejszym opracowaniu zaproponowano wprowadzenie dekompozycji (rozkładu) odbiornika trójfazowego na komponenty (części) czynny i bierny stowarzyszone z przepływem strumieni mocy czynnej pulsującej (jednokierunkowej) o wartości średniej równej mocy czynnej odbiornika oraz biernej oscylującej (dwukierunkowej) o wartości średniej zerowej.

Ujęcie takie poza widoczną ścisłą analogią do mocy chwilowej prądu sinusoidalnego jednofazowego, pozwala na prostą interpretację fizyczną i ekonomiczną zjawisk związanych z przesyłaniem energii. Energia pobrana przez odbiornik, przesłana przez linię jest dokładnie równa energii strumienia pulsującego (jednokierunkowego skierowanego do odbiornika). Energia przeniesiona przez strumień oscylujący (dwukierunkowy od i do odbiornika) jest zerowa. Obie składowe generują w linii straty mocy, których sumaryczna wielkość zawiera składnik niezbędny (minimalny) zależny od składowej czynnej pulsującej oraz składnik nadmiarowy zależny od składowej biernej oscylującej. W aspekcie ekonomicznym ważnym zadaniem jest redukcja strat nadmiarowych realizowana metodą kompensacji składowej chwilowej strumienia mocy oscylującej i powiązanej z nią mocy biernej.

Warto docenić dalekowzroczną intuicję Fryzego, twórcy koncepcji metod analizy w dziedzinie czasu, bowiem dopiero obecnie powstała możliwość pełnej jej realizacji. Dotyczy to zarówno możliwości formułowania procedur obliczeniowych, jak również sposobu doboru elementów układów kompensujących. W tym kierunku rozwijane są metody kompensacji aktywnej z wykorzystaniem sterowanych źródeł prądowych.

Trzeba zaznaczyć, że komponent bierny odbiornika jako układ idealnie bezstratny może zawierać nie tylko pasywne elementy reaktancyjne LC, ale również sterowane elementy aktywne.

Należy podkreślić, że efektywność i prostota koncepcji Fryzego staje się nie do przecenienia w zastosowaniach praktycznych przy uwzględnieniu wykorzystywanych obecnie cyfrowych możliwości rejestracji i przetwarzania danych w czasie rzeczywistym.

Podstawy teoretyczne

Podobnie jak we wcześniejszym opracowaniu autorów [1, 2] rozważane są przebiegi chwilowe prądów i napięć (sygnały) $x(t)$ okresowe o okresie T , spełniające warunek okresowości $x(t)=x(t+T)$.

Dla dwóch przebiegów okresowych $x(t)$, $y(t)$ przyjmuje się skróconą notację iloczynu skalarnego jako pewnej miary ich współliniowości

$$(1) \quad (x, y) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t) dt$$

wygodną dla zapisu wielu operacji całkowych. Gdy spełniony jest warunek $(x, y)=0$ to sygnały x , y nazywamy wzajemnie ortogonalnymi czyli prostopadłymi do siebie.

Z powyższej definicji jest widoczne, że iloczyn skalarny spełnia własność rozdzielności $(\alpha x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y)$ i przemienności $(x, y) = (y, x)$.

Wprowadzamy skrócony zapis normy $\|x\|$ sygnału jako jego wartość skuteczną oraz wartość średnią

$$(2) \quad \|x\|^2 = (x, x), \quad \langle x \rangle = (x, 1)$$

Miarę skośności sygnałów $x(t)$ i $y(t)$ może określać parametr q wyrażony wzorem

$$q = \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - (x, y)^2}$$

Ze znanej nierówności Buniakowskiego-Schwarza wynika, że $\|x\| \|y\| \geq |(x, y)|$

$$\left[\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \right] \left[\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt \right] \geq \left[\frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t) dt \right]^2$$

a więc wyrażenie pod znakiem pierwiastka jest nieujemne.

Przy zerowej skośności (czyli równoległości) $q=0$ wtedy $\|x\| \|y\| = |(x, y)|$ sygnały są liniowo zależne, natomiast przy maksymalnej skośności (czyli prostopadłości) $q=\|x\| \|y\|$, wtedy $(x, y)=0$ sygnały są ortogonalne i liniowo niezależne.

W analizie układów trójfazowych wygodną formą zapisu wielkości chwilowych oraz wykonywanych operacji jest postać macierzowa zapisu sygnałów napięć i prądów jako macierzy kolumnowych.

Wprowadzamy rozszerzoną ogólną formę zapisu iloczynu skalarnego dla macierzy kolumnowych

$$(3) \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_A \\ y_B \\ y_C \end{bmatrix}$$

określoną wzorem

$$(4) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}^T \mathbf{y} dt = (x_A, y_A) + (x_B, y_B) + (x_C, y_C)$$

Sygnały napięć i prądów w układzie 3-fazowym wyrażamy wzorami macierzy kolumnowych

$$(5) \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}$$

W przyjętej notacji dla iloczynu skalarnego w zapisie macierzowym moc czynna określona jest wzorem

$$(6) \quad P = (\mathbf{u}, \mathbf{i}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T \mathbf{i} dt = \langle \mathbf{u}^T \mathbf{i} \rangle = (u_A, i_A) + (u_B, i_B) + (u_C, i_C)$$

oraz normy macierzy i wartości skutecznego napięcia i prądu

$$(7) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 = \|u_A\|^2 + \|u_B\|^2 + \|u_C\|^2 = U_A^2 + U_B^2 + U_C^2,$$

$$(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = \|\mathbf{i}\|^2 = \|i_A\|^2 + \|i_B\|^2 + \|i_C\|^2 = I_A^2 + I_B^2 + I_C^2$$

Jako podstawę rozszerzenia koncepcji Fryzego na układy 3-fazowe przyjmujemy rozwiązanie zadania minimalizacji następującego wyrażenia (kwadratu normy)

$$(*) \quad \|\mathbf{i} - A\mathbf{u}\|^2 = \min(A)$$

w którym wyznaczany jest parametr A .

Po obliczeniu pochodnej

$$(**) \quad \frac{\partial}{\partial A} \|\mathbf{i} - A\mathbf{u}\|^2 = 0$$

Uwzględniając, że

$$\|\mathbf{i} - A\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{i} - A\mathbf{u}, \mathbf{i} - A\mathbf{u}) = \|\mathbf{i}\|^2 - 2A(\mathbf{u}, \mathbf{i}) + A^2 \|\mathbf{u}\|^2$$

oraz wzór (6), (7) otrzymuje się konduktancję ekwiwalentną

$$(8) \quad A = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{i})}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{P}{\|u_A\|^2 + \|u_B\|^2 + \|u_C\|^2} = G_e = \frac{1}{R_e}$$

Sformułowanie metody

Uzyskane wyżej rozwiązanie zadania minimalizacyjnego pozwala na jednoznaczną dekompozycję macierzy prądowej na dwie składowe ortogonalne

$$(9) \quad \mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_b, \quad (\mathbf{i}_a, \mathbf{i}_b) = 0$$

gdzie pierwsza składowa z wzoru (9) nazywana składową czynną prądu w sensie Fryzego, wyraża wzajemną \mathbf{i}_a oraz \mathbf{u} liniowość, określona jest wzorami wynikającymi z (8)

$$(10) \quad \mathbf{i}_a = G_e \mathbf{u}, \quad \|\mathbf{i}_a\| = G_e \|\mathbf{u}\|$$

$$P = G_e \|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\| G_e \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_a\|$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy spełnienie warunku ortogonalności wyrażonego drugim równaniem we wzorze (9) przy uwzględnieniu zależności (10)

$$(11) \quad \begin{aligned} (\mathbf{i}_a, \mathbf{i}_b) &= (\mathbf{i}_a, \mathbf{i} - \mathbf{i}_a) = (\mathbf{i}_a, \mathbf{i}) - (\mathbf{i}_a, \mathbf{i}_a) = \\ &= (G_e \mathbf{u}, \mathbf{i}) - \|\mathbf{i}_a\|^2 = G_e P - G_e^2 \|\mathbf{u}\|^2 = \\ &= G_e P - G_e P = 0 \end{aligned}$$

przy czym $\mathbf{i}_b = \mathbf{i} - \mathbf{i}_a$ oznacza składową bierną prądu w sensie Fryzego.

Na podstawie udowodnionej ortogonalności otrzymuje się warunek trójkąta dla norm macierzy prądowych wyrażony wzorem

$$(12) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{i}\|^2 &= (\mathbf{i}, \mathbf{i}) = (\mathbf{i}_a + \mathbf{i}_b, \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_b) = \\ &= (\mathbf{i}_a, \mathbf{i}_a) + 2(\mathbf{i}_a, \mathbf{i}_b) + (\mathbf{i}_b, \mathbf{i}_b) = \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_b\|^2 \end{aligned}$$

Z uzyskanego warunku trójkąta dla norm prądu wynika ważny dla zastosowań warunek trójkąta dla mocy w układzie trójfazowym.

Mnożąc stronami równanie (12) przez kwadrat normy macierzy napięciowej otrzymuje się równanie postaci

$$(13) \quad \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{i}_b\|^2,$$

Wprowadzając typowe oznaczenia dla mocy

$$(14) \quad P = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_a\| = G_e \|\mathbf{u}\|^2, \quad Q = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_b\|, \quad S = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}\|$$

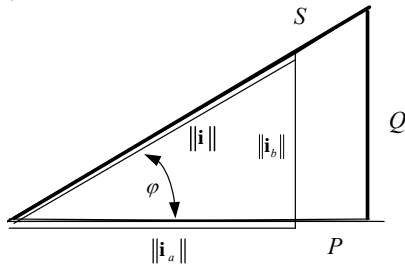
otrzymuje się związek dla trójkąta mocy

$$(15) \quad S^2 = P^2 + Q^2$$

oraz

$$(16) \quad \cos \varphi = \frac{\|\mathbf{i}_a\|}{\|\mathbf{i}\|} = \frac{P}{S}, \quad \sin \varphi = \frac{\|\mathbf{i}_b\|}{\|\mathbf{i}\|} = \frac{Q}{S}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\|\mathbf{i}_b\|}{\|\mathbf{i}_a\|} = \frac{Q}{P}$$

gdzie -przez S, P, Q oznaczono moc pozorną, czynną i bierną mierzone w jednostkach $1[S]=1\text{VA}$, $1[P]=1\text{W}$, $1[Q]=1\text{VAr}=1\text{var}$, które przedstawiono graficznie na wykresie (rys.1).



Rys.1 Graficzne przedstawienie trójkąta normy prądów (wartości skutecznych prądów) i mocy w układzie trójfazowym

Należy podkreślić, że wzory (15, 16) identyczne jak dla układu jednofazowego prądu sinusoidalnego dotyczą jednak dowolnego złożonego odbiornika trójfazowego (liniowego lub nieliniowego) z dowolnymi odkształconymi napięciami i prądami.

Warto zauważyć, że moc czynna P wyrażona wzorem (6) jest miarą współliniowości przebiegów napięć i prądów odbiornika czyli miarą ich kreatywności energetycznej.

Natomiast zgodnie z wzorem (14) moc P związana jest ze składową czynną prądu Fryzego i jej wartość wyraża suma wskazań watomierzy (rys. 2).

$$(17) \quad P = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_a\| = \|\mathbf{u}\| G_e \|\mathbf{u}\| = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{i})}{\|\mathbf{u}\|^2} \|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{i}) = (u_A, i_A) + (u_B, i_B) + (u_C, i_C) = P_A + P_B + P_C$$

Z kolei moc bierna Q jest miarą skośności czyli braku kreatywności energetycznej przebiegów napięć i prądów odbiornika.

Szczególnie istotne jest konsekwentne wyrażenie mocy pozornej S we wzorze (14), które w rozwiniętym zapisie ma postać

$$(18) \quad S = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}\| = \sqrt{(\|u_A\|^2 + \|u_B\|^2 + \|u_C\|^2)(\|i_A\|^2 + \|i_B\|^2 + \|i_C\|^2)}$$

Wzór na moc pozorną zapisany w postaci (18) jest znanym wzorem podanym przez Buchholza [15]. W przedstawionym ujęciu jest on bezpośrednią konsekwencją rozszerzenia koncepcji Fryzego [10] z teorii mocy prądów odkształconych na układy trójfazowe.

Formalnie w sensie matematycznym, możliwość wprowadzenia mocy bierniej odbiornika trójfazowego wynika z nierówności Buniakowskiego-Schwarza w trój-wymiarze (3D), postaci

$$\left[\sum_{k=A,B,C} \frac{1}{T} \int_0^T u_k^2(t) dt \right] \left[\sum_{k=A,B,C} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2(t) dt \right] \geq \left[\sum_{k=A,B,C} \frac{1}{T} \int_0^T u_k(t) i_k(t) dt \right]^2$$

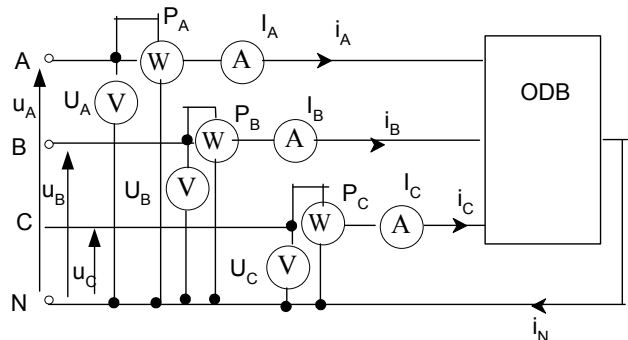
czyli $S^2 \geq P^2$, stąd $Q^2 = S^2 - P^2 \geq 0$.

W dalszych rozważaniach będzie potwierdzone, że proponowane przez Fryzego ujęcie analizy w dziedzinie czasu jest jednolitą, ogólną i efektywną metodą analizy zagadnień energetycznych szczególnie w układach trójfazowych.

Określone wzorami (14) moce w pełni wystarczają do opisu zagadnień energetycznych dowolnego badanego odbiornika. Całkowicie zbędne jest definiowanie dodatkowych rodzajów mocy odbiornika np. mocy bierniej w sensie Budeanu, mocy deformacji, mocy rozrzutu a także dodatkowych mocy związanych z jego asymetrią i koniecznością uwzględniania mocy poszczególnych składowych symetrycznych [14]. Wszystkie one są majoryzowane przez moc bierną absolutną w sensie Fryzego Q określoną wzorem (14).

Użyteczność pojęcia strumienia mocy przy opisie struktury odbiornika

Rozpatrywany jest odbiornik trójfazowy (rys. 2) o zadanych przebiegach napięć i prądów wyrażonych macierzami kolumnowymi (5).



Rys.2 Dowolny odbiornik trójfazowy i pomiar wartości napięć prądów, oraz mocy

W układzie trójfazowym, dla opisu procesów energetycznych, celowe jest sformułowanie pojęcia całkowitego strumienia mocy chwilowej przesyłanej przez linię, wyrażonej wzorem

$$(19) \quad p = \mathbf{u}^T \mathbf{i} = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C$$

Zdefiniowana wyżej wartość chwilowa strumienia całkowitego może być rozłożona jednoznacznie na dwie części składowe ; p_a -czynną i p_b -bierną według podanych niżej zależności

$$(20) \quad p = \mathbf{u}^T \mathbf{i} = \mathbf{u}^T (\mathbf{i}_a + \mathbf{i}_b) = p_a + p_b$$

gdzie

$$(21) \quad p_a = \mathbf{u}^T \mathbf{i}_a = u_A i_{aA} + u_B i_{aB} + u_C i_{aC} = G_e \mathbf{u}^T \mathbf{u} = G_e (u_A^2 + u_B^2 + u_C^2)$$

$$(22) \quad p_b = \mathbf{u}^T \mathbf{i}_b = u_A i_{bA} + u_B i_{bB} + u_C i_{bC}$$

Z wzorów (21, 20) widoczne są następujące własności

$$(23) \quad p_a \geq 0, \quad \langle p_a \rangle = P, \\ \langle p_b \rangle = \langle p - p_a \rangle = \langle p \rangle - \langle p_a \rangle = P - P = 0$$

Pierwsza nierówność oznacza nieujemną wartość, składowej czynnej strumienia mocy, następnie równości oznaczają kolejno, że wartość średnia strumienia składowej czynnej jest równa mocy czynnej oraz wartość średnia strumienia składowej bierniej jest równa zeru.

Oznacza to fizycznie, że składowa czynna jest nieujemnym przebiegiem pulsującym, składowa bierna jest przebiegiem oscylującym o zerowej wartości średniej.

Należy zaznaczyć, że gdy wyjątkowo $p_b=0$ to oscylacje strumienia nie występują ale jednocześnie może być pobierana moc bierna $Q \neq 0$ związana ze stratami w linii.

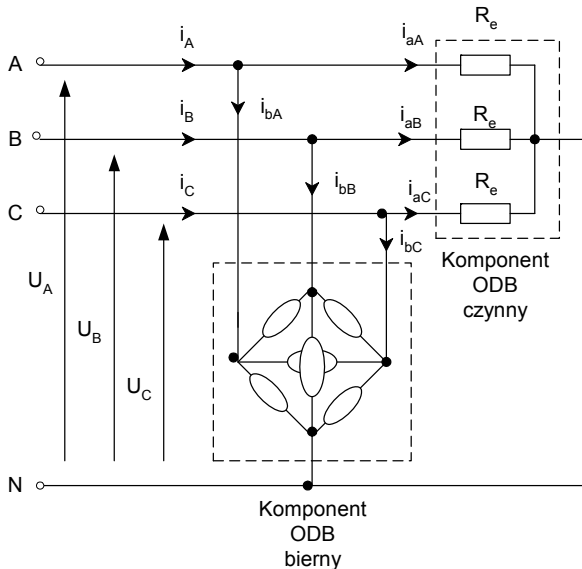
Własności wyrażane przez wzory (23) są uogólnieniem analogicznym znanych dla prądu sinusoidalnego, zależności

$$(24) \quad u = \sqrt{2}U \sin \omega t, \quad i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$$

$$p = ui = p_a + p_b$$

$$p_a = UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t), \quad p_b = -UI \sin \varphi \sin 2\omega t$$

Z przedstawionej wyżej możliwości rozkładu strumienia mocy na składowe, wynika możliwość dekompozycji czyli wprowadzenia dla odbiornika trójfazowego, jego dwóch części, komponentu czynnego i komponentu biernego (rys.3.)



Rys.3 Odbiornik 3-fazowy oraz równoważne komponenty -czynny i bierny odbiornika

Całkowity strumień mocy dostarczanej do odbiornika, rozdziela się na strumienie pulsujący czynny skierowany do komponentu czynnego odbiornika oraz strumień osylający bierny skierowany do komponentu biernego odbiornika. W sensie fizycznym komponent czynny jest absorberem energii, przesyłanej jednokierunkowo dopływającej do odbiornika, natomiast komponent bierny jest reflektorem energii przesyłanej dwukierunkowo od i do odbiornika. Komponent czynny ma strukturę rezystancyjnej gwiazdy symetrycznej o rezystancji ekwiwalentnej odbiornika R_e , komponent bierny ma strukturę cztero-biegownika zupełnego.

W analogii do obwodu jednofazowego, komponent czynny i bierny spełniają rolę układu równoległego rezystora i dwójnika biernego.

Z wprowadzonymi wyżej komponentami odbiornika związane są moce pozorne, czynne i biernie (14).

Dla komponentu czynnego odbiornika spełnione są zależności

$$(25) \quad S_{(a)} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_a\|, \quad P_{(a)} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_a\| = P, \quad Q_{(a)} = \sqrt{S_{(a)}^2 - P_{(a)}^2} = 0$$

Dla komponentu biernego odbiornika spełnione są zależności

$$(26) \quad S_{(b)} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_b\|, \quad Q_{(b)} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_b\| = Q, \quad P_{(b)} = \sqrt{S_{(b)}^2 - Q_{(b)}^2} = 0$$

Z zależności powyższych wynikają następujące widoczne własności energetyczne komponentów danego odbiornika. Moc bierna komponentu czynnego jest równa zero, natomiast moc czynna jest równa mocy czynnej danego odbiornika. Moc czynna komponentu biernego jest zerowa, natomiast moc bierna jest równa mocy bierniej danego odbiornika. Komponent bierny jest bezstratny.

Moce pozorne komponentów odbiornika oraz moc pozorna całego odbiornika spełniają zależności

$$(27) \quad S_{(a)}^2 + S_{(b)}^2 = \|\mathbf{u}\|^2 (\|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_b\|^2) = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{i}\|^2 = S^2 = P^2 + Q^2$$

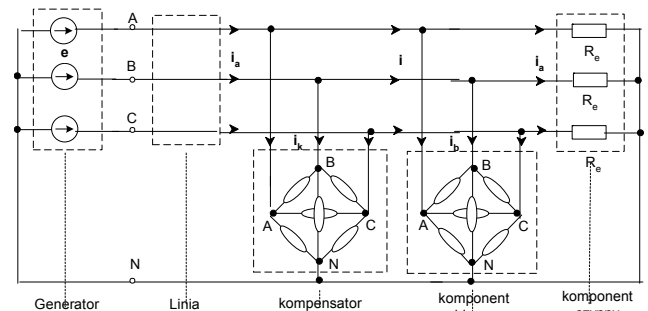
Pełna kompensacja jako uogólniony rezonans prądów komponentu biernego i kompensatora w dziedzinie czasu

Możliwość zastąpienia w rozpatrywanym układzie trójfazowym (rys.4) dowolnego odbiornika przy danych napięciach przez równoważne dwa komponenty czynny i bierny, sprowadza zagadnienie pełnej kompensacji do doboru kompensatora o strukturze czwórbieguna biernego i elementach komponentu biernego z zachowaniem przeciwnej wartości przebiegów prądowych w odpowiadających sobie gałęziach kompensatora i komponentu biernego. Wówczas dla pełnej kompensacji zostanie spełniony warunek uogólnionego rezonansu prądów w dziedzinie czasu

$$(28) \quad \mathbf{i}_b + \mathbf{i}_k = 0, \quad \mathbf{i}_k = -\mathbf{i}_b$$

Warto zauważyć, że klasyczny rezonans prądu dotyczy tylko jednej harmonicznej i jest pojęciem z dziedziny widmowej. Natomiast pełna kompensacja mocy bierniej polega na realizacji uogólnionego rezonansu dowolnie odkształconego przebiegu prądu (28) w dziedzinie czasu czyli jest zgodna z ideą teorii Fryzego.

Kompensator można traktować jako przeciw ekran odbijający strumień oscylującej energii napływającej od strony odbiornika (rys. 4). W efekcie przez linię przepływa jednokierunkowo ze źródła, tylko strumień pulsujący energii powodujący tylko stratę minimalną mocy. Pod względem fizycznym układ kompensatora z komponentem biernym stanowią uogólniony oscylator energii w dziedzinie czasu realizujący uogólniony rezonans prądu.



Rys.4 Układ trójfazowy i jego części składowe-generator, linia, kompensator, komponent bierny, komponent czynny

Należy zaznaczyć, że w wyniku kompensacji napięcia na odbiorniku ulegają zmianie a więc również jego prądy i prądy komponent.

Dla niepełnej kompensacji można wyznaczyć parametr liczbowy γ proporcjonalnie zmieniający prądy komponentu biernego odbiornika z wzoru

$$(29) \quad \mathbf{i}_k = \gamma \mathbf{i}_b, \quad \mathbf{i}_b + \gamma \mathbf{i}_b = \mathbf{i}'_b$$

Przy niezmienniczej składowej czynnej, spełnione są związki

$$(30) \quad \|\mathbf{i}'_b\| = tg \varphi \|\mathbf{i}_a\|, \quad \|\mathbf{i}'_b\| = tg \varphi' \|\mathbf{i}_a\|$$

Uwzględniając zależności (29) i (30) dla współczynnika γ wynika wzór

$$(31) \quad \gamma = \frac{tg \varphi'}{tg \varphi} - 1$$

gdzie $-\varphi, \varphi'$, oznaczają kąty współczynnika mocy przed i po kompensacji

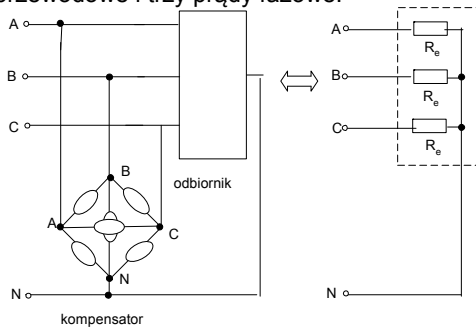
Dla przykładu obliczmy γ dla poprawy współczynnika mocy z wartości $\cos \varphi = 0,6$ do wartości $\cos \varphi' = 0,8$.

Z podstawienia do (31) otrzymujemy

$$\gamma = \frac{0,6/0,8}{0,8/0,6} - 1 = \frac{3/4}{4/3} - 1 = \frac{9}{16} - 1 = -\frac{7}{16}$$

Obliczony parametr pozwala wyznaczyć prądy kompensatora na podstawie znanych prądów wartości prądów komponentu biernego przy niepełnej kompensacji.

Rozpatrywany komponent bierny i kompensator mają jednakową strukturę układu zupełnego jako czwórbiegunka zawierającą 6 gałęzi w których płyną trzy prądy międzyprzewodowe i trzy prądy fazowe.



Rys.5 Równoważność układów po kompensacji

Na rysunku (rys.5) przedstawiono wynik pełnej kompensacji dla dowolnego odbiornika trójfazowego (liniowego, nieliniowego, symetrycznego, niesymetrycznego) przy dowolnym zasilaniu trójfazowym niesinusoidalnym z kompensatorem o strukturze czwórbieguna i o wyznaczonych prądach zgodnie z [2].

W ogólnym przypadku prądy komponentu mogą być obliczane zgodnie z procedurą przedstawioną w [2] i podanym szczegółowym algorytmem obliczeń z zachowaniem odpowiednich wariantów wynikających z warunku niezależności liniowej układu napięć zasilających.

Warto zaznaczyć, że wartości wyznaczanych prądów w gałęziach czwórbieguna nie spełniają warunku jednoznaczności. Zgodnie ze znaną zasadą przenoszenia jednakowych źródeł prądowych prąd w jednej dowolnie wybranej gałęzi może być przyjęty dowolnie. Fakt ten pozwala na uwzględnienie innych dodatkowych warunków sygnalizowanych już wcześniej w opracowaniu [2].

Likwidacja straty nadmiarowej w linii jako ekonomiczny efekt pełnej kompensacji

Energia pobrana przez odbiornik związana jest z przepływem przez linię zasilającą całkowitego strumienia mocy chwilowej jako sumy mocy pulsującej i oscylującej. Moc pulsująca jednokierunkowa skierowana jest do komponentu czynnego odbiornika, natomiast oscylująca dwukierunkowa do komponentu biernego. Średnia wartość mocy pulsującej p_a jest mocą czynną odbiornika P i odpowiada za całkowitą energię pobraną przez odbiornik. Średnia wartość mocy oscylującej p_b jest równa zero a jej przebieg odpowiada za wymianę energii między odbiornikiem i źródłem.

Z procesem przepływu energii przez linię związane są całkowite straty mocy w linii, wyrażone wzorem

$$(32) \quad \Delta P_l = R_l \|\mathbf{i}\|^2 = R_l (\|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_b\|^2) = \Delta P_{l(a)} + \Delta P_{l(b)} = R_l \frac{S^2}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

$$\Delta P_{l(a)} = R_l \|\mathbf{i}_a\|^2 = R_l \frac{P^2}{\|\mathbf{u}\|^2}, \quad \Delta P_{l(b)} = R_l \|\mathbf{i}_b\|^2 = R_l \frac{Q^2}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

gdzie przez R_l oznaczono rezystancję jednego przewodu symetrycznej linii trójfazowej

Wzór (32) wyraża rozkład całkowitej straty na składowe związane z składowymi ortogonalnymi prądami czynnego i biernego a tym samym uwzględniając zależności (25), (26) z mocą czynną i bierną odbiornika.

Jest widoczne, że z odbiornikiem pobierającym moc czynną P nawet przy pełnym skompensowaniu mocy bierniej Q do zera, związana jest zawsze nieunikniona strata mocy, która jest minimalną

$$(33) \quad \Delta P_{l(\min)} = \Delta P_{l(a)} = R_l \|\mathbf{i}_a\|^2 = R_l \frac{P^2}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{R_l}{R_e^2} \|\mathbf{u}\|^2$$

gdzie zgodnie z wzorem (8) R_e -oznacza rezystancję symetrycznej gwiazdy tworzącej komponent czynny odbiornika.

Poza określonymi wyżej stratami: całkowitą ΔP_l i minimalną $\Delta P_{l(\min)}$ w linii istotne znaczenie ekonomiczne jak również fizyczne ma ich różnica jako wartość straty nadmiarowej

$$(34) \quad \Delta P_l - \Delta P_{l(\min)} = R_l (\|\mathbf{i}\|^2 - \|\mathbf{i}_a\|^2) = R_l \|\mathbf{i}_b\|^2 = R_l \frac{Q^2}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

Wartość straty nadmiarowej odniesiona do straty minimalnej określa współczynnik nadmiaru strat κ , który po wykorzystaniu zależności (32), (33) może być wyrażony wzorem

$$(35) \quad \kappa = \frac{\Delta P_l - \Delta P_{l(\min)}}{\Delta P_{l(\min)}} = \frac{S^2 - P^2}{P^2} = \frac{Q^2}{P^2}$$

W podsumowaniu wzorów (32), (33), (34) można stwierdzić, że moce S , P , Q dotyczą i wyrażają miary całkowitej, minimalnej i nadmiarowej straty przesyłania energii w linii.

Przy uwzględnieniu związków (16) wynikających z trójkąta mocy (rys. 1), współczynnik mocy λ i nadmiaru strat κ spełniają wzajemne zależności

$$(37) \quad \lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi, \quad \kappa = \left(\frac{Q}{P}\right)^2 = \tan^2 \varphi$$

$$(38) \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}, \quad \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1$$

Z uwzględnienia powyższych tożsamości trygonometrycznych; wynikają bezpośrednie związki między współczynnikiem mocy λ i współczynnikiem nadmiaru strat κ postaci

$$(39) \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa}}, \quad \kappa = \frac{1}{\lambda^2} - 1$$

Celowe jest również podawanie współczynnika strat nadmiarowych w postaci procentowej

$$\kappa_{\%} = 100 \tan^2 \varphi = 100 \left(\frac{Q}{P}\right)^2 \%$$

Z występującymi stratami w linii związany jest współczynnik sprawności linii

$$(40) \quad \eta_{\%} = 100 \frac{P}{\Delta P_l + P} = 100 \frac{R_e \|\mathbf{i}_a\|^2}{R_l \|\mathbf{i}\|^2 + R_e \|\mathbf{i}_a\|^2} = \frac{100}{\rho(1 + \kappa) + 1}$$

gdzie przez ρ oznaczono stosunek względny rezystancji linii R_l do rezystancji gwiazdy zastępczej odbiornika R_e

$$\rho = \frac{R_l}{R_e}$$

W przypadku pełnej kompensacji mocy bierniej $Q=0$ przez linię przepływa tylko strumień mocy pulsującej powodujący minimalną stratę energii przy zlikwidowanej stracie nadmiarowej, wtedy

$$\kappa = 0, \quad \lambda = \cos \varphi = 1, \quad \eta_{\%} = \frac{100}{\rho + 1} = 100 \frac{R_e}{R_l + R_e}$$

Znaczenie wprowadzonych wyżej współczynników do oceny ekonomicznej przesyłu energii może być zobrazowane przykładem częściowej kompensacji i poprawy współczynnika mocy $\lambda = \cos \varphi$ z wartości 0,6 do wartości 0,8 przy praktycznie niezmiennych napięciach.

Stąd współczynnik nadmiaru strat κ zmalał z wartości

$$\kappa_{\%} = 100 \operatorname{tg}^2 \varphi = 100 \left(\frac{0,8}{0,6} \right)^2 = 177,7\%$$

do wartości

$$\kappa_{\%} = 100 \operatorname{tg}^2 \varphi = 100 \left(\frac{0,6}{0,8} \right)^2 = 56,25\%$$

Praktycznie oznacza to, że częściowa kompensacja mocy biernej zmniejsza nadmiarowe (zbyteczne) straty energii ponad trzykrotnie w stosunku do prawie niezmiennych strat minimalnych (nieuniknionych).

Efekt kompensacji wpływa również znacząco na poprawę współczynnika sprawności linii. W rozpatrywanym przykładzie przy rezystancji względnej linii $\rho = R_l / R_e = 0,025$ uzyskuje się poprawę współczynnika sprawności z wartości

$$\eta = \frac{100}{\rho(1+\kappa)+1} = \frac{100}{0,025(1+1,777)+1} = 93,5\%$$

do wartości

$$\eta = \frac{100}{\rho(1+\kappa)+1} = \frac{100}{0,025(1+0,5625)+1} = 96,2\%$$

W tym przypadku maksymalna wartość sprawności występuje przy pełnej kompensacji $\kappa=0$ i wynosi

$$\eta_{\max} = \frac{100}{\rho(1+\kappa)+1} = \frac{100}{0,025+1} = 97,5\%$$

Przykłady zastosowania metody dekompozycji odbiornika

Rozpatrzmy dwa przykłady ilustrujące przedstawione wyżej metody analizy.

Na wstępie rozważany jest odbiornik liniowy (rys.6a) o rezystancji R zasilany w ogólnym przypadku układem trójfazowym napięć niesinusoidalnych

$$(*) \quad u_A, u_B, u_C.$$

W tym przypadku odbiornik może być traktowany różnorodnie:

- i) jako obciążenie jednofazowe
- ii) jako niesymetryczne obciążenie trójfazowe
- iii) jako niesymetryczne obciążenie trójfazowe o zasilaniu symetrycznym sinusoidalnym

i) W pierwszym przypadku do odbiornika dopływa pulsujący strumień energii o mocy chwilowej

$$i_A = \frac{u_A}{R}, \quad p = u_A i_A = \frac{u_A^2}{R}, \quad p \geq 0$$

Moc czynna jako wartość średnia mocy chwilowej $p(t)$, moc pozorna S i moc bierna Q wynoszą

$$P = \frac{U_A^2}{R}, \quad S = U_A I_A = \frac{U_A^2}{R} = P, \quad Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 0.$$

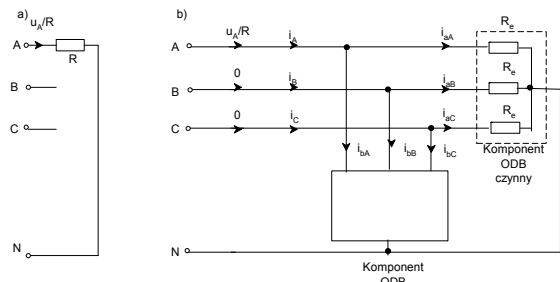
Strata mocy w linii jednofazowej

$$\Delta P_l = R_l I^2 = R_l \left(\frac{U_A}{R} \right)^2 = \frac{R_l}{R} P = \frac{R_l}{U_A^2} P^2 = \Delta P_{l(\min)1f}$$

W tym przypadku występuje tylko moc chwilowa pulsująca o wartości średniej równej mocy czynnej P , nie jest pobierana moc bierna Q a więc nie jest wymagana kompensacja, nie ma strat nadmiarowych, stąd strata ΔP_l w linii jednofazowej jest minimalna.

ii) Sytuacja jest zupełnie inna gdy odbiornik traktuje się jako trójfazowy (rys.6 b) o napięciach wyrażonych jak we wzorach (*) oraz prądach

$$i_A = \frac{u_A}{R}, \quad i_B = 0, \quad i_C = 0.$$



Rys.6 Rezystor jako odbiornik jednofazowy i jego zastępcze trójfazowe komponenty czynny i bierny

W tym przypadku, po wydzieleniu komponentu czynnego i biernego dopływają prądy

$$i_{aA} = \frac{u_A}{R_e}, \quad i_{aB} = \frac{u_B}{R_e}, \quad i_{aC} = \frac{u_C}{R_e}$$

$$i_{bA} = u_A \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_e} \right), \quad i_{bB} = -\frac{u_B}{R_e}, \quad i_{bC} = -\frac{u_C}{R_e}$$

Do komponentu czynnego dopływa strumień energii pulsującej o mocy chwilowej p_a

$$p_a = \frac{u_A^2 + u_B^2 + u_C^2}{R_e}, \quad p_a \geq 0$$

gdzie rezystancja zastępcza (ekwiwalentna) R_e wyraża się wzorem (8)

$$R_e = \frac{U_A^2 + U_B^2 + U_C^2}{U_A^2} R$$

Do komponentu biernego dopływa strumień energii o mocy chwilowej p_b i o zerowej wartości średniej (mocy czynnej)

$$p_b = \frac{u_A^2}{R} - \frac{u_A^2 + u_B^2 + u_C^2}{R_e}, \quad \langle p_b \rangle = 0$$

Pobierana moc czynna, pozorna i bierna przez odbiornik wyraża się wzorami

$$P = \sqrt{\|u\|^2 \|i\|^2} = \sqrt{(U_A^2 + U_B^2 + U_C^2) \left[\left(\frac{U_A}{R_e} \right)^2 + \left(\frac{U_B}{R_e} \right)^2 + \left(\frac{U_C}{R_e} \right)^2 \right]} = \frac{U_A^2 + U_B^2 + U_C^2}{R_e} = \frac{U_A^2}{R}$$

$$S = \sqrt{\|u\|^2 \|i\|^2} = \sqrt{(U_A^2 + U_B^2 + U_C^2) \left(\frac{U_A}{R} \right)^2}$$

$$Q = \sqrt{\|u\|^2 \|i\|^2} = \sqrt{(U_A^2 + U_B^2 + U_C^2) \left[\left(\frac{U_A - U_A}{R} \right)^2 + \left(\frac{U_B}{R_e} \right)^2 + \left(\frac{U_C}{R_e} \right)^2 \right]} = \sqrt{S^2 - P^2}$$

Całkowita i minimalna strata mocy w linii związane są z podanymi wyżej mocami i określone są zależnościami

$$\Delta P_l = R_l \frac{S^2}{\|u\|^2} = R_l \frac{P^2}{\|u\|^2} + R_l \frac{Q^2}{\|u\|^2}$$

$$\Delta P_{l(\min)3f} = R_l \frac{P^2}{\|u\|^2} = R_l \frac{P^2}{U_A^2 U_A^2 + U_B^2 + U_C^2} =$$

$$= \Delta P_{l(\min)1f} \frac{U_A^2}{U_A^2 + U_B^2 + U_C^2} < \Delta P_{l(\min)1f}$$

Nadmiarowe straty jako różnica strat całkowitych i minimalnych wyrażają się przez moc bierną

$$\Delta P_l - \Delta P_{l(\min)} = R_l \frac{Q^2}{\|u\|^2} = R_l \frac{P^2}{\|u\|^2} \operatorname{tg}^2 \varphi = \Delta P_{l(\min)3f} \kappa = \Delta P_{l(\min)3f} \left(\frac{Q}{P} \right)^2$$

Strata nadmiarowa znika przy dokonaniu pełnej kompensacji mocy biernej $Q=0$.

Jest również widoczne, że po kompensacji strata minimalna w układzie trójfazowym jest mniejsza niż w układzie jednofazowym.

Dla przykładu, przy odkształconym zasilaniu i pełnej kompensacji, redukcja strat minimalnych jest trzykrotna

$$\Delta P_{l(\min)3f} = \frac{R_l P}{R} \frac{U_A^2}{U_A^2 + U_B^2 + U_C^2} = \Delta P_{l(\min)1f} \frac{1}{3}$$

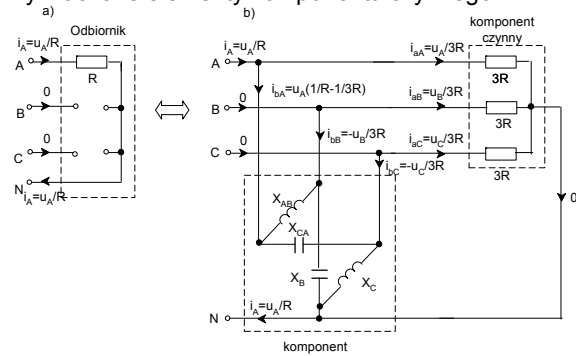
przy warunku napięciowym

$$U_A = U_B = U_C$$

iii) W celu dalszego wyjaśnienia rozpatrzmy bardziej szczegółowo przypadek sinusoidalnego układu napięć zasilających

$$u_A = \sqrt{2}U \sin \omega t, \quad u_B = \sqrt{2}U \sin(\omega t - 120^\circ), \quad u_C = \sqrt{2}U \sin(\omega t - 240^\circ)$$

Dla rozpatrywanego układu (rys.7 a, b) mogą być wyznaczone elementy komponentu czynnego



Rys.7 Rezystor jako odbiornik jednofazowy i jego zastępcze trójfazowe komponenty czynny (jako gwiazda 3R) oraz bierny jako czwórbiegun i jego elementy LC

$$R_e = \frac{U_A^2 + U_B^2 + U_C^2}{U^2} R = \frac{3U^2}{U^2} R = 3R$$

oraz elementy komponentu biernego (przedstawione w [2])

$$X_B = -\sqrt{3}R, \quad X_C = \sqrt{3}R$$

$$X_{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{2}R, \quad X_{CA} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}R,$$

które w tym przypadku mogą być realizowane jako elementy reaktancyjne o ściśle określonych wartościach LC.

Przebiegi chwilowe prądów odbiornika i komponentu czynnego oraz biernego określone są wzorami

$$\begin{aligned} i_A &= \sqrt{2} \frac{U}{R} \sin \omega t, & i_{a1} &= \sqrt{2} \frac{U}{3R} \sin \omega t, & i_{b1} &= i_A - i_{a1} = \sqrt{2} \frac{2U}{3R} \sin \omega t, \\ i_B &= 0, & i_{b1} &= i_B - i_{b1} = -\sqrt{2} \frac{U}{3R} \sin(\omega t - 120^\circ), & i_{c1} &= i_C - i_{c1} = -\sqrt{2} \frac{U}{3R} \sin(\omega t - 240^\circ) \end{aligned}$$

W układzie jednofazowym przebieg chwilowy strumienia mocy byłby pulsujący

$$p = \frac{u_A^2}{R} = 2 \frac{U^2}{R} \sin^2 \omega t = \frac{U^2}{R} (1 - \cos 2\omega t)$$

o wartości średniej równej mocy czynnej

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Nie występowałby przebieg chwilowy mocy oscylującej.

W układzie trójfazowym strumień mocy chwilowej odbiornika

$$p(t) = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C = 2 \frac{U^2}{R} \sin^2 \omega t + 0 + 0$$

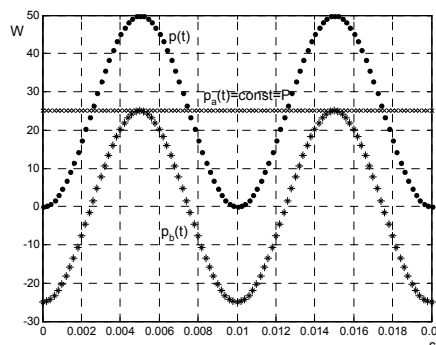
W układzie trójfazowym strumień mocy chwilowej komponentu czynnego jest pulsujący i spełnia warunek wyrównania (stałości w czasie)

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{u_A^2 + u_B^2 + u_C^2}{3R} = \\ &= 2 \frac{U^2}{3R} [\sin^2 \omega t + \sin^2(\omega t - 120^\circ) + \sin^2(\omega t - 240^\circ)] = \\ &= 2 \frac{U^2}{3R} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t - 240^\circ) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t - 480^\circ) \right] = \\ &= \frac{U^2}{R} = P = const \end{aligned}$$

W układzie trójfazowym występuje strumień mocy oscylującej pobierany przez komponent bierny wyrażony jest wzorem

$$\begin{aligned} p_b &= u_A i_{b1} + u_B i_{b2} + u_C i_{b3} = \\ &= \sqrt{2}U \sin \omega t \sqrt{2} \frac{2U}{3R} \sin \omega t + \\ &= -\sqrt{2}U \sin(\omega t - 120^\circ) \sqrt{2} \frac{U}{3R} \sin(\omega t - 120^\circ) + \\ &= -\sqrt{2}U \sin(\omega t - 240^\circ) \sqrt{2} \frac{U}{3R} \sin(\omega t - 240^\circ) = -\frac{U^2}{R} \cos 2\omega t \end{aligned}$$

Strumień mocy chwilowej komponentu biernego jest oscylujący o wartości średniej zerowej a więc nie przenosi on energii. Wykresy chwilowe obu strumieni i strumienia całkowitego przedstawiono na wykresach (rys.9)



Rys.9 Wykresy przebiegów czasowych strumienia mocy odbiornika $p(t)$ i strumienia mocy pulsującej komponentu czynnego $p_a(t)$, oraz strumienia mocy oscylującej $p_b(t)$ komponentu biernego, przy $U=50V$, $R=100\Omega$

Obliczmy w rozpatrywanym przypadku (sinusoidalnego zasilania) straty całkowite, minimalne i nadmiarowe stowarzyszone z przepływem strumienia mocy przez linię 3-fazową.

W tym celu wyznaczamy moce czynną, pozorną i bierną.

$$\begin{aligned} P &= \frac{U^2}{R}, \\ S &= \sqrt{3U^2 \left(\frac{U}{R}\right)^2} = \sqrt{3} \frac{U^2}{R} = \sqrt{3}P, \\ Q &= \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{3P^2 - P^2} = \sqrt{2}P. \end{aligned}$$

stąd współczynniki mocy λ i nadmiaru κ przyjmują wartości

$$\lambda = \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \kappa_{\%} = 100 \operatorname{tg}^2 \varphi = 100 \left(\frac{\sqrt{2}P}{P}\right)^2 = 200\%$$

przy kącie $\varphi=63,43^\circ$.

Wartości strat całkowitych określone są wzorem (32)

$$\Delta P_i = R_i \frac{S^2}{\|u\|^2} = R_i \frac{P^2 + (\sqrt{2}P)^2}{3U^2} = R_i \left(\frac{P}{U}\right)^2 = \Delta P_{1faz}$$

Przy pełnej kompensacji mocy biernej $Q=0$, straty maleją do wartości minimalnej (3 krotnie w stosunku do obciążenia jednofazowego) i są związane z przesyłaniem energii do komponentu czynnego

$$\Delta P_{i(\min)3faz} = R_i \frac{P^2}{3U^2} = \frac{1}{3} R_i \left(\frac{U}{R}\right)^2 = \frac{1}{3} \Delta P_{1faz}$$

Strata związana z przesyłaniem oscylującego strumienia energii do komponentu biernego (bez kompensacji) czyli strata nadmiarowa wyraża się wzorem

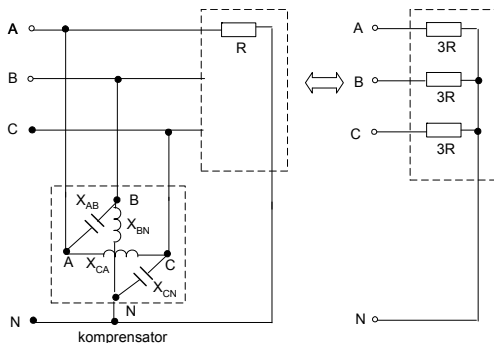
$$\Delta P_i - \Delta P_{i(\min)3faz} = R_i \frac{Q^2}{3U^2} = R_i \frac{2P^2}{3U^2} = \frac{2}{3} R_i \left(\frac{U}{R}\right)^2 = \frac{2}{3} \Delta P_{1faz}$$

Na rysunku (rys.8) przedstawiono schematycznie wyniki zastosowania kompensacji dla rezystora R wraz z układem kompensatora trójfazowego LC (X_{AB} , X_{CA} , X_{BN} , X_{CN}), z gwiazdą symetryczną 3R przy zasilaniu trójfazowym układem symetrycznym napięć sinusoidalnych

$$X_{BN} = \omega L_{BN} = \sqrt{3}R, \quad X_{CN} = -\frac{1}{\omega C_{CN}} = -\sqrt{3}R$$

$$X_{AB} = -\frac{1}{\omega C_{AB}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}R, \quad X_{CA} = \omega L_{CA} = \frac{3\sqrt{3}}{2}R,$$

Rozpatrzone przykłady obrazują fizyczne i ekonomiczne znaczenie mocy biernej i jej kompensacji.



Rys.8 Równoważność układów po włączeniu kompensatora

Uogólnienie warunku minimalizacji strat mocy przy trójfazowej linii niesymetrycznej

W rozważaniach wstępnych niniejszego opracowania uwzględniono szczególną zależność (10) $i_a = G_e u$

$$(41) \quad \begin{bmatrix} i_{aA} \\ i_{aB} \\ i_{aC} \end{bmatrix} = G_e \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix}, \quad G_e = \frac{P}{\|u\|^2} = \frac{P}{\|u_A\|^2 + \|u_B\|^2 + \|u_C\|^2}$$

jako wynik rozwiązania zadania minimalizacji wyrażenia $\|i - i_a\|^2 = \min$. Stanowi to podstawę rozszerzenia koncepcji Fryzego na układy trójfazowe. Zależność ta postulowana jest w podobnym ujęciu również w artykule [15].

Bardziej ogólne założenia dotyczące prądu czynnego Fryzego mogą być sformułowane w postaci spełnienia trzech postulatów:

I) zależność liniowa

$$(42) \quad \begin{bmatrix} i_{aA} \\ i_{aB} \\ i_{aC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_A & 0 & 0 \\ 0 & G_B & 0 \\ 0 & 0 & G_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix}$$

II) warunek mocy

$$(43) \quad G_A \|u_A\|^2 + G_B \|u_B\|^2 + G_C \|u_C\|^2 = P$$

III) dobranie wartości G_A, G_B, G_C aby strata mocy na linii była minimalna (po kompensacji $\|i_b\|=0$)

$$(44) \quad R_{IA} \|i_{aA}\|^2 + R_{IB} \|i_{aB}\|^2 + R_{IC} \|i_{aC}\|^2 = \min$$

Wyznaczenie minimum (44) z zależnościami (42) i (43) sprowadza się do minimum warunkowego funkcji Φ z współczynnikiem Lagrange'a μ postaci

$$(45) \quad \Phi(G_A, G_B, G_C, \mu) = R_{IA} G_A^2 \|u_A\|^2 + R_{IB} G_B^2 \|u_B\|^2 + R_{IC} G_C^2 \|u_C\|^2 + \mu [P - G_A \|u_A\|^2 - G_B \|u_B\|^2 - G_C \|u_C\|^2]$$

Obliczając pochodne cząstkowe

$$(46) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial G_A} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial G_B} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial G_C} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0$$

po przekształceniach, otrzymujemy

$$(47) \quad 2R_{IA} G_A = \mu, \quad 2R_{IB} G_B = \mu, \quad 2R_{IC} G_C = \mu, \quad \mu = \frac{2P}{P_z}$$

gdzie pomocniczo oznaczono

$$(48) \quad P_z = \frac{\|u_A\|^2}{R_{IA}} + \frac{\|u_B\|^2}{R_{IB}} + \frac{\|u_C\|^2}{R_{IC}}$$

Uwzględniając (47) i (48) wyznacza się poszukiwane wartości rozwiązania

$$(49) \quad G_A = \frac{P}{R_{IA} P_z}, \quad G_B = \frac{P}{R_{IB} P_z}, \quad G_C = \frac{P}{R_{IC} P_z}$$

oraz minimalne straty (44) w linii i maksymalną sprawność

$$(50) \quad \Delta P_{\min} = \frac{P^2}{P_z}, \quad \eta_{\max} = \frac{P}{\Delta P_{\min} + P} = \frac{1}{\frac{P}{P_z} + 1}$$

W przypadku symetrii parametrów linii $R_{IA} = R_{IB} = R_{IC} = R_l$ ze wzorów (48) i (49) wynika symetria parametrów komponentu czynnego odbiornika

$$(51) \quad G_A = G_B = G_C = G_e = \frac{P}{\|u_A\|^2 + \|u_B\|^2 + \|u_C\|^2} = \frac{1}{R_e}, \quad \frac{P}{P_z} = \frac{R_l}{R_e}$$

A więc głębiej ujmując, symetria gwiazdy komponentu czynnego wynika z żądania minimalizacji strat w linii przy pełnej kompensacji oraz ze symetrii linii. Ponieważ warunek symetrii rezystancyjnej linii praktycznie jest zawsze spełniony, oznacza to że gwiazda symetryczna o rezystancji zastępczej R_e określonej wzorem (8) po przeprowadzeniu pełnej kompensacji zawsze realizuje minimalne straty mocy w linii.

Wnioski końcowe

W skróconym podsumowaniu rozważań należy wyróżnić konsekwentny sposób rozszerzenia koncepcji Fryzego na zagadnienia analizy ogólnej problematyki mocy prądów niesinusoidalnych w układach trójfazowych.

Na szczególną uwagę zasługuje powiązanie przesyłania strumienia mocy pulsującej i oscylującej z rozkładem odbiornika na komponenty czynny i bierny oraz ich struktury jako gwiazdy i czwórbieguna. W ten sposób zadanie kompensacji dowolnego odbiornika zawiera w sobie jego dekompozycję na komponent czynny oraz znaną już strukturę budowy kompensatora jako układu czwórbieguna zupełnego dualnego do struktury komponentu biernego. Pełna kompensacja polega na wytworzeniu prądów w kompensatorze o wartościach przeciwnych do prądów komponentu biernego.

Powyżej wykazano, że komponent czynny przy symetrycznej linii zasilającej jest gwiazdą symetryczną.

W ogólnym przypadku jest gwiazdą niesymetryczną o odpowiednio dobranych parametrach realizującym minimalizację strat mocy w linii po kompensacji (49).

W artykule [2] podano algorytm i procedurę obliczeniową 6 prądów kompensatora przy spełnieniu warunku niezależności liniowej w przestrzeni 2D dla układu sinusoidalnego oraz 3D dla odkształconego napięć zasilających.

Zakończenie

Aktualność problematyki teorii prądów odkształconych jest ściśle związana z obecnymi zadaniami energetyki a szczególnie dotyczy ekonomicznego sposobu wytwarzania, przesyłania i przetwarzania energii elektrycznej.

W historycznym rozwoju energetyka na etapie początkowym miała charakter metropolitarny, miasta wyposażane we własne elektrownie, które pokrywały potrzeby lokalne. Przykładem jest zastąpienie koni jako „siły żywej” w komunikacji tramwajowej na początku XX wieku (Wrocław, Królewiec 1909 r.).

Powstanie dużych aglomeracji miejskich oraz ośrodków przemysłowych spowodowało znaczny wzrost potrzeb energetycznych, a jednocześnie odległa lokalizacja zasobów i nośników energetycznych wymagała budowy rozległych linii przesyłowych wysokich napięć. Wielka skala (gigawatowa) przesyłanych mocy wymusza ograniczenie

strat nawet w granicach ułamka procentu, co jest równoważne oszczędności mocy w elektrowni niejednego bloku. Tę problematykę poszerza coraz bardziej widoczna tendencja rozwoju napędu elektrycznego w motoryzacji samochodowej. Ma to sens nie tylko ekonomiczny ale również ekologiczny wchodzący w zakres polityki obniżenia efektu cieplarnianego.

Stąd główny temat niniejszego opracowania stanowi powiązanie strat z zagadnieniami kompensacji mocy biernej.

Przedstawiona metoda analizy zagadnień mocy w dziedzinie czasu, o charakterze teoretycznym, pozwala na rozwiązywanie praktycznych problemów energetyki. Obecne możliwości techniczne rejestracji sygnałów oraz przetwarzania cyfrowego pozwalają na jej dalsze doskonalenie.

Autorzy. Dr hab. inż. Adam Skopec, emerytowany prof. P.Wr. Politechnika Wrocławska, Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 53-370 Wrocław, Dr inż. Czesław Stec, Politechnika Wrocławska, Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 53-370 Wrocław, E-mail: czeslaw.stec@gmail.com

LITERATURA

- [1] A.Skopec, Cz. Stec, *Moc bierna absolutna jako podstawa teorii pełnej kompensacji prądu niesinusoidalnego w dziedzinie czasu w układach jednofazowych i trójfazowych*, Przegląd Elektrotechniczny, R.87 NR 1/2011, s. 220-22
- [2] A.Skopec, Cz. Stec: *Metoda pełnej kompensacji mocy biernej absolutnej prądów niesinusoidalnych układu trójfazowego czteroprzewodowego w dziedzinie czasu*, Przegląd Elektrotechniczny, R.89, NR 11/2013, s. 175-188
- [3] A.Skopec, Cz.Stec, P Janik, Z. Waclawek: *Teoretyczne aspekty realizacji pełnej kompensacji w obwodach prądu niesinusoidalnego*, Przegląd elektrotechniczny, R.88 NR 8/2012, s. 295-302
- [4] M. Siwczyński : *O współzależności między mocą bierną a*

- stabilnością napięcia zasilania w przypadku okresowych niesinusoidalnych przebiegów napięcia i prądu*, Przegląd Elektrotechniczny, R. 87 NR 6/2011, s.169-173
- [5] M. Siwczyński: *Energetyczna teoria obwodów*. Wydawnictwo Instytutu Gospodarki Surowcami i Energią PAN, Kraków 2003
 - [6] M. Siwczyński: *Metody optymalizacyjne w teorii mocy obwodów elektrycznych*. Monografia 183; seria „Inżynieria Elektryczna”. Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1995
 - [7] L.S. Czarnecki, *Currents Physical Components (CPC) concept: a fundamental for power theory*, Przegląd Elektrotechniczny, R.84, NR 6/2008, s.28-37
 - [8] Czarnecki L. S., *Moce w obwodach elektrycznych z niesinusoidalnymi przebiegami napięć i prądów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005
 - [9] S. Fryze: *Wybrane zagadnienia teoretycznych podstaw elektrotechniki*, PWN Warszawa-Wrocław, 1966, *Teoria mocy w obwodach elektrycznych*, 197-256
 - [10] S.Fryze: *Moc rzeczywista, urojona i pozorna w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia*, Przegląd Elektrotechniczny , NR 7/1931, s.193-203
 - [11] Inveited paper: *Tutorials from International School on Nonsinusoidal Currents and Compensation*, Przegląd Elektrotechniczny, NR6/2010 s.1-56.
 - [12] A.Skopec, Cz.Stec : *Metoda obliczania pełnej i optymalnej kompensacji mocy biernej nieliniowych odbiorników jednofazowych lub trójfazowych niesymetrycznych przy zasilaniu źródłami rzeczywistymi sinusoidalnymi*, Przegląd Elektrotechniczny, R.90 NR 9/2014, s. 229-233
 - [13] Skopec A., Stec Cz. : *Efektywna realizacja kompensacji pełnej i optymalnej mocy biernej w układzie jednofazowym oraz trójfazowym 3 lub 4 przewodowym przy zasilaniu układem symetrycznym źródeł rzeczywistych i niesymetrycznym odbiorniku liniowym*, Przegląd Elektrotechniczny, R.91 NR 6/2015, s.171-176
 - [14] Czarnecki L.S. Haley P.M.: *Currents' Physical Components (CPC) In Four-Wire Systems with Nonsinusoidal Symmetrical Voltage*, Przegląd Elektrotechniczny, R.91 NR 6/2015, s.48-53
 - [15] Staud V.: *Fryze-Buchholtz-Depenbrock: uniwersalna teoria mocy w dziedzinie czasu*, Przegląd Elektrotechniczny, R.84, NR 6/2008, s.1-11