

doi:10.15199/48.2017.12.20

Modelowanie matematyczne procesów nieustalonych w układzie napędowym dźwigu

Streszczenie. W pracy przedstawiono, wykorzystując metody interdyscyplinarne, model matematyczny układu elektromechanicznego w układzie napędowym dźwigu. Analizowany układ składa się z silnika indukcyjnego, przekładni mechanicznej oraz mechanizmu podnoszącego. Model matematyczny o mechanicznych parametrach rozłożonych opisuje skomplikowany układ rzeczywisty. Różniczkowe równania stanu przedstawiono w postaci Cauchy'ego, które rozwiązano przy pomocy metod numerycznych. Wyniki symulacji komputerowej poddano analizie, a wyniki przedstawiono w postaci graficznej

Abstract. In the paper a mathematical model of electromechanical unit of a crane drive system, based on interdisciplinary methods, is presented. The analysed system consists of induction motor, mechanical transmission and lifting mechanism. The mathematical model with continuously distributed parameters describes a complex real system. Differential state equations in Cauchy's form are given and solved using numerical methods. Results of computer simulation are analysed and presented in a graphic form. (**Mathematical modeling of transient processes in a crane drive system**).

Słowa kluczowe: zasada Hamiltona-Ostrogradskiego, Euler-Lagrange'a system, zespół elektryczny, silnik asynchroniczny
Keywords: Hamilton-Ostrogradsky's principle, Euler-Lagrange's system, electrical set, induction motor

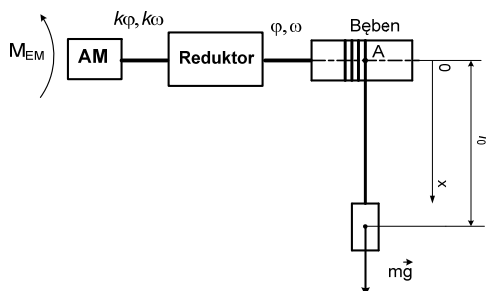
Wstęp

Napędy elektryczne z silnikami indukcyjnymi są szeroko wykorzystywane w przemysłowych układach napędowych przede wszystkim w przemyśle chemicznym, przetwórczym i hutniczym.

W niniejszej pracy przedstawiono model matematyczny układu napędowego dźwigu z silnikiem indukcyjnym, który poprzez sprężysto-dysypacyjny układ transmisji ruchu jest obciążony zadaniem momentem obciążenia. Do sformułowania modelu matematycznego analizowanego układu napędowego wykorzystano interdyscyplinarną metodą wariacyjną, która opiera się na modyfikacji integralnej wariacyjnej zasady Hamiltona, poprzez wykorzystanie rozszerzenia funkcji Lagrange'a o dwa dodatkowe składniki [1, 3]. Pierwszy składnik uwzględnia rozproszenie energii w układzie oraz drugi – uwzględnia energię sił aktywnych i pasywnych o charakterze niepotencjalnym. [1, 3].

Model matematyczny układu.

Model matematyczny układu sformułowano na podstawie zmodyfikowanej zasady Hamiltona-Ostrogradskiego. Z punktu widzenia fizyki wymieniona metoda pozwala uzyskać końcowe równania stanu obiektu wyłącznie na podstawie zasady najmniejszego działania [1]. Na rysunku 1 przedstawiono uproszczony schemat analizowanego układu elektromechanicznego.



Rys. 1. Schemat układu elektromechanicznego

Rozszerzony funkcjonal działania wg Hamiltona-Ostrogradskiego uzyskano wyznaczając elementy zmodyfikowanego lagrangianu [1, 4]:

$$(1) \quad L^* = \tilde{T}^* - P^* + \Phi^* - D^*,$$

gdzie: L^* – zmodyfikowana funkcja Lagrange'a, \tilde{T}^* – koenergia kinetyczna, P^* – energia potencjalna, Φ^* – energia dyssypacji, D^* – energia sił zewnętrznych [1].

Dla układów o parametrach rozłożonych w jednowymiarowej przestrzeni zmodyfikowana zasada Hamiltona przybiera postać [1]:

$$(2) \quad S = \int_{t_1}^{t_2} \left(L^* + \int_l L_l dl \right) dt, \quad I = \int_l L_l dl,$$

gdzie: S – funkcjonal działania wg Hamiltona, L_l – gęstość zmodyfikowanej funkcji Lagrange'a, I – funkcjonal energetyczny.

W jakości uogólnionych współrzędnych wykorzystano ładunki w uzwojeniach (stojana i wirnika) silnika indukcyjnego. Dla stojana: $q_{1-3} = Q_{SA}, Q_{SB}, Q_{SC}$, i wirnika: $q_{4-6} = Q_{RA}, Q_{RB}, Q_{RC}$, kąt obrotu bębna: $q_7 = \varphi$ oraz funkcję uogólnionych współrzędnych – przesunięcia liny: $q(x, t) = u(x, t)$. W jakości uogólnionych prędkości odpowiednie prądy w wymienionych uzwojeniach: $\dot{q}_{1-3} = i_{SA}, i_{SB}, i_{SC}$, $\dot{q}_{4-6} = i_{RA}, i_{RB}, i_{RC}$, $\dot{q}_7 = \omega$, a także funkcję: $\dot{q}(x, t) = v(x, t)$ – prędkości liny.

Podczas formowania modelu matematycznego przyjęto założenie, że wał napędowy bębna (rys. 1) jest absolutnie sztywny. Co pozwala zmniejszyć liczbę współrzędnych uogólnionych systemu. Przekładnia reduktora jest wielkością stałą czyli kąt obrotu i prędkość wirowania silnika różnie się od odpowiednich bębna o współczynnik transformacji – k . Mechaniczny układ współrzędnych został sprowadzony do punktu A bębna (rys. 1).

Całkowy moment bezwładności układu można zapisać w postaci:

$$(3) \quad J_{\Sigma} = J_B + J_{R(II)} + k^2 J_{EM},$$

gdzie: J_B – moment bezwładności bębna, $J_{R(II)}$ – moment bezwładności reduktora, J_{EM} – moment bezwładności wirnika silnika indukcyjnego, k – współczynnik transformacji reduktora (przekładnia).

Funkcję przesunięcia początku i końca liny oznaczono odpowiednio jako $u_1(t)$, $u_N(t)$.

Aby sformułować rozszerzony funkcjonal działania wg Hamiltona niezbędne jest aby układ o parametrach rozłożonych nie zmieniał swoich parametrów geometrycznych [1]. W rozpatrywanym przypadku lina zmienia swoją długość. A to znaczy, aby osiągnąć formalizm Lagrange'a do funkcjonału należy dołączyć tak zwane umowy transwersalności [1]. Ponieważ równanie ruchu początku liny jest znane i ma postać:

$$(4) \quad u_1 \equiv u(x, t)|_{x=R\varphi} = R_B \varphi,$$

gdzie: R_B – promień bębna,

co pozwala sformułować funkcjonal działania. Uwzględniając przyjęte założenia, można wykorzystać zmodyfikowaną zasadę Hamiltona do rozwiązania postawionego zadania.

Elementy zmodyfikowanego lagrangianu dla układu elektromechanicznego przedstawionego na rys. 1 można zapisać w postaci:

$$(5) \quad \tilde{T}^* = \tilde{T}_E^* + \tilde{T}_M^* = \sum_{j=1}^3 \left(\int_0^{i_{Sj}} \Psi_{Sj} di_{Sj} + \int_0^{i_{Rj}} \Psi_{Rj} di_{Rj} \right) + \frac{J_{\Sigma} \omega^2}{2},$$

$$(6) \quad P^* = 0, \quad \Phi^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left(\int_0^t r_{Sj} i_{Sj}^2 d\tau + \int_0^t r_{Rj} i_{Rj}^2 d\tau \right),$$

$$(7) \quad D^* = \sum_{j=1}^3 \int_0^t u_j i_{Sj,k} d\tau - \int_0^{\omega} M(\omega) d\omega d\tau, \quad j = A, B, C,$$

$$(8) \quad \frac{\partial T^*}{\partial x} \equiv T_l = \frac{\rho S}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2, \quad \frac{\partial P^*}{\partial x} \equiv P_l = \frac{ES}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2,$$

$$(9) \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \equiv \Phi_l = \int_0^t \left(\frac{v}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\xi}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 \right) d\tau,$$

gdzie: Ψ_S, Ψ_R – wektory kolumnowe sprzężeń magnetycznych uzwojeń stojana i wirnika silnika indukcyjnego, r_S, r_R – macierzy oporności uzwojeń stojana i wirnika, i_S, i_R – wektory kolumnowe prądów w uzwojeniach stojana i wirnika, u – wektor kolumnowy napięcia zasilania silnika, M_{EM} – moment elektromagnetyczny silnika, $M(\omega)$ – moment obciążenia, E – moduł Junga materiału liny, S – przekrój liny, ρ – gęstość materiału liny, v – współczynnik zewnętrznego rozproszenia liny, ξ – współczynnik wewnętrznego rozproszenia w linie.

Uwzględniając przedstawione zależności wyznaczono wariacje funkcjonału i przyrównano ją do zera. Uwzględniając dodatkowo zależność (10)

$$(10) \quad M_{EM} = \frac{\partial [\tilde{T}_E^*]}{\partial \varphi},$$

gdzie M_{EM} – moment rozruchowy silnika,

otrzymano równania ekstremali funkcjonału.

$$(11) \quad \frac{d\Psi_S}{dt} = \mathbf{u} - \mathbf{r}_S \mathbf{i}_S, \quad \frac{d\Psi_R}{dt} = -\mathbf{r}_R \mathbf{i}_R,$$

$$(12) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J_{\Sigma}} (M_{EM} - M(\omega)), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega,$$

$$(13) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\xi}{\rho S} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{v_e}{\rho S} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

W zależności (12) należy wyznaczyć wyrażenie dla obliczenia momentu obciążenia mechanizmu ($M(\omega)$).

Siła, działająca na początek liny (F_1) opisana jest funkcją:

$$(14) \quad F_1 = ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0(\varphi)} + \xi \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial x \partial t} \Big|_{x=0(\varphi)}.$$

A siła, działająca na obciążenie liny:

$$(15) \quad F_D \equiv ma = mg - F_P - F_S,$$

gdzie F_D – siła D'alemberta, F_P – siła prężności w końcowym odcinku liny, F_S – siła wewnętrznego rozproszenia w końcowym odcinku liny.

Wtedy, moment zależy od sił sprężystości oraz dyssypacji w pierwszym jednostkowym odcinku długiej liny można zapisać następującym równaniem:

$$(16) \quad M(\omega) = RF_1 = R \left(ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0(\varphi)} + \xi \frac{\partial u^2(x, t)}{\partial x \partial t} \Big|_{x=0(\varphi)} \right).$$

Integralny współczynnik sztywności liny wyznaczono z równowagi sił sprężystości [2]

$$(17) \quad c \Delta u = ES \frac{\partial u}{\partial x} \approx ES \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Wtedy, dla rzeczywistej długości liny współczynnik sztywności przybiera postać (zmienna długości $\Delta l = \Delta x$):

$$(18) \quad c = c(\Delta l) = \frac{ES}{\Delta l}, \quad \Delta l = \Delta l(\varphi),$$

a to oznacza, że sztywność liny jest funkcją jej długości.

Warunki brzegowe do równania (13) z uwzględnieniem zależności (4) oraz zasady D'alemberta (15) można zapisać w następującej postaci:

$$(19) \quad u(x, t)|_{x=0(\varphi)} = 0 \Rightarrow v(x, t)|_{x=0(\varphi)} = 0, \quad 0(\varphi) = 0,$$

$$(20) \quad ma + F_S + F_D = m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=l(\varphi)} + ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l(\varphi)} + \xi \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \Big|_{x=l(\varphi)} = mg, \quad l = l(\varphi) = l_0 - R\varphi.$$

Dyskretyzując przy pomocy metody prostych wyrażenia (13), (19), (20), otrzymano:

$$(21) \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{E}{\rho(\Delta x(l))^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \frac{\xi}{\rho S(\Delta x(l))^2} (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}), \quad i = 2, \dots, N-1,$$

$$(22) \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0,$$

$$(23) \quad m \frac{dv_N}{dt} + ES \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2\Delta x(l)} + \xi \frac{v_{N+1} - v_{N-1}}{2\Delta x(l)} = mg.$$

Rozwiązując razem wyrażenia (21), przy $i = N$ oraz (23) wyznaczono ostatecznie równania prędkości końcowego węzła linii

$$(24) \quad \frac{dv_N}{dt} = \frac{2(mg\Delta x(l) + ES(u_{N-1} - u_N) + \xi(v_{N-1} - v_N))}{(\rho S\Delta x(l) + 2m)\Delta x(l)},$$

a także równania przesunięć wszystkich węzłów linii.

$$(25) \quad \frac{du_j}{dt} = v_j, \quad j = 2, 3, \dots, N.$$

Biorąc pod uwagę algorytm przekształceń algebraicznych przedstawionych w [1, 3], uzyskano model matematyczny silnika we współrzędnych prądów:

$$(26) \quad \frac{d\mathbf{i}_S}{dt} = \mathbf{A}_S(\mathbf{u} - \mathbf{r}_i \mathbf{i}_S) + \mathbf{A}_{SR}(-\mathbf{\Omega}(k)\mathbf{\Psi}_R - \mathbf{r}_R \mathbf{i}_R),$$

$$(27) \quad \frac{d\mathbf{i}_R}{dt} = \mathbf{A}_{RS}(\mathbf{u} - \mathbf{r}_S \mathbf{i}_S) + \mathbf{A}_R(-\mathbf{\Omega}(k)\mathbf{\Psi}_R - \mathbf{r}_R \mathbf{i}_R) + \mathbf{\Omega}(k)\mathbf{i}_R.$$

gdzie $\mathbf{A}_S, \mathbf{A}_{SR}, \mathbf{A}_{RS}, \mathbf{A}_R$ – współczynniki, które zależą od indukcyjności rozproszenia i magnesowania silnika asynchronicznego, $\mathbf{\Omega}(k)$ – macierz prędkości kątowej silnika.

Wyrażenia opisujące strumienie skojarzone uzwojeń silnika, opisują następujące zależności [1, 3]:

$$(28) \quad \mathbf{\Psi}_R = \mathbf{L}_{\sigma R} \mathbf{i}_R + (\mathbf{\Pi}(k))^{-1} \mathbf{\Psi} = \mathbf{L}_{\sigma R} \mathbf{i}_R + \tau^{-1} ((\mathbf{\Pi}(k))^{-1} \mathbf{i}_S + \mathbf{i}_R).$$

Moment rozwijany przez silnik indukcyjny wyznaczono z zależności [1]:

$$(29) \quad M_{EM} = \sqrt{3} p_0 k (i_{SB} i_{RA}^{\Pi} - i_{SA} i_{RB}^{\Pi}) / \tau_m, \quad \tau_m = 1 / L_m,$$

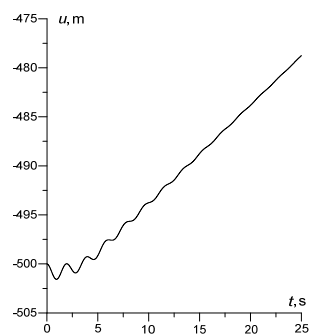
gdzie p_0 – liczba par biegunów maszyny, $\mathbf{\Pi}(k)$ – macierz ukośnych przekształceń [1].

Wspólnemu całkowaniu podlega układ równań różniczkowych: (12) (21), (24) – (27) z uwzględnieniem wyrażen (3), (15), (16), (18), (22), (28), (29).

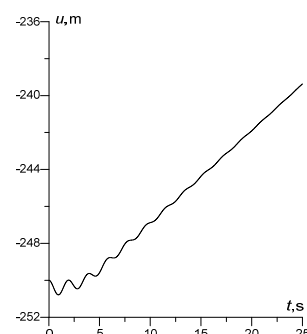
Wyniki symulacji komputerowej.

Symulacja komputerowa procesów nieustalonych przeprowadzono z wykorzystaniem następującego układu elektromechanicznego: silnik indukcyjny poprzez sztywny wał obracał bęben o promieniu R , na który została nawinięta lina. Na końcu linii został przyczepiony ciężar masy m . Silnik indukcyjny o danych: $P_N = 4,5$ kW, $U_N = 400$ V, $I_N = 9,4$ A, $n_N = 1440$ s⁻¹, $r_S = 1,2$ Ω, $r_R = 1,21$ Ω, $\alpha_{\sigma S} = 146$ H⁻¹, $\alpha_{\sigma R} = 128$ H⁻¹, $p_0 = 2$, $J = 0,05$ kg·m², $R = 0,2$ m, $l_0 = 500$ m, $m = 400$ kg, $J_{\Sigma} = 800$ kg·m², $k=30$, $E = 1,5 \cdot 10^{11}$ N/m², $N = 90$.

Wyniki obliczeń symulacyjnych przedstawiono poniżej.

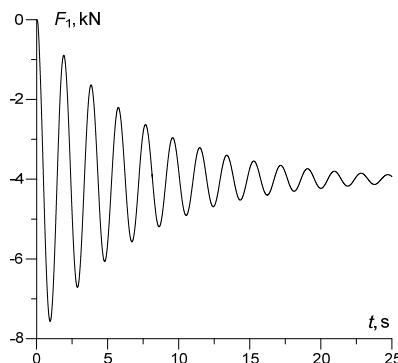


Rys. 2. Przebieg czasowy przesunięcia końca linii



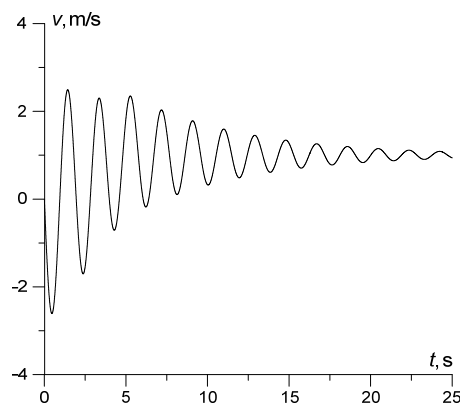
Rys. 3. Przebieg czasowy przesunięcia środka linii

Na rysunkach 3, 4 przedstawiono przebiegi czasowe przesunięcia końcowego oraz środkowego punktu dyskretyzacji elastycznej linii, koniec której został obciążony ciężarem. Analizując przebiegi przedstawione na rysunkach można wyciągnąć wnioski o oscylacyjnych procesach w całej linii. Oczywiście maksymalna amplituda wahań jest na końcu linii, a minimalna na jej początku. Z biegiem czasu wahania zaczynają zanikać. Warto tutaj zaznaczyć, iż postępowy ruch linii przyspiesza zanikanie fali sprężystej.



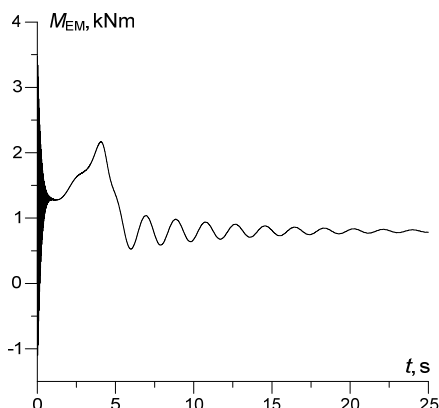
Rys. 4. Przebieg czasowy zmian siły sprężystości w pierwszym jednostkowym odcinku linii

Na rysunku 4 przedstawiono przebieg czasowy zmian siły sprężystości w pierwszym odcinku dyskretyzacji linii. Na rysunku widać, iż w stanie ustalonym siła sprężystości jest co do wartości równa ciężarowi. W chwili początkowej widać praktycznie podwójny wzrost siły sprężystości co z kolei wskazuje na potrzebę uwzględnienia tych procesów podczas wyboru grubości linii oraz analizy jej wytrzymałości.



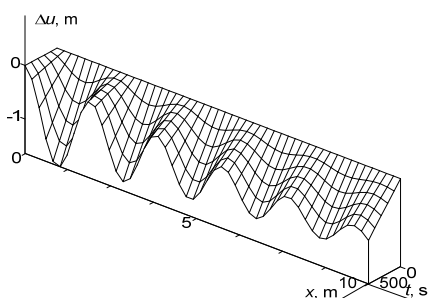
Rys. 5. Przebieg czasowy prędkości ruchu ciężaru

Na rysunku 5 przedstawiono przebieg czasowy prędkości ruchu ciężaru. Widać tutaj istotne wahania prędkości ruchu ciężaru, które z czasem zaczynają zanikać dzięki działaniu sił dyssypacji. W stanie ustalonym prędkość przyjmuje wartość stałą (rys. 2).

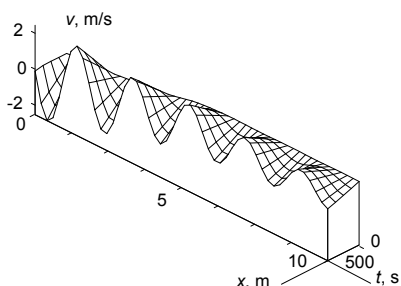


Rys. 6. Przebieg czasowy momentu obrotowego bębna

Na rysunku 6 przedstawiono przebieg czasowy momentu obrotowego bębna. Właśnie ten moment maszyny indukcyjnej (w stanach nieustalonych) powoduje efekt wahań ciężaru. A ten ostatni przez sprężysto-dyssypacyjną linę zwiększa oscylację prędkości ruchu obrotowego bębna. Następnie energia wahań transformuje się w wahania funkcji prądów, od których zależy postać momentu obrotowego (oczywiście z uwzględnieniem przekładni reduktora) i cały proces powtarza się ponownie do zaniku drgań, dzięki działaniu rozproszenia.



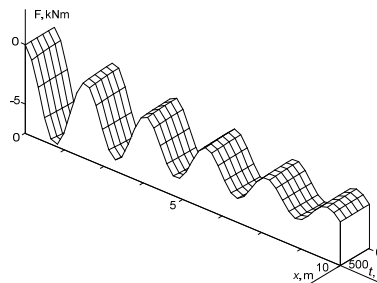
Rys. 7. Czasowo-przestrzenny rozkład funkcji wydłużenia liny w zakresie czasowym $t \in [0; 10]$ s



Rys. 8. Czasowo-przestrzenny rozkład funkcji prędkości liny w zakresie czasowym $t \in [0; 10]$ s

Na rysunkach 7 – 9 przedstawiono czasowo-przestrzenne rozkłady następujących funkcji: wydłużenia liny ($\Delta u = l(x, t) - l_0(x)$), prędkości ruchu liny oraz siły sprężystości w jednostkowych odcinkach liny. Wymienione

rysunki przedstawiono w formacie 3D. Przedstawiają one najwięcej informacji dla ewentualnego użytkownika. Rysunek 7 należy analizować razem z rysunkami 2, 3, rys. 8 – z rys. 5 oraz rys. 9 – z rys. 4. W stanie ustalonym amplitudy oscylacji analizowanych zależności funkcyjnych zmierzają do zera. Warto zaznaczyć, iż wartości funkcji sił sprężystości we wszystkich jednostkach liny są praktycznie jednakowe, co związane jest z liniową cechą parametrów liny.



Rys. 9. Czasowo-przestrzenny rozkład funkcji siły sprężystości w jednostkowych odcinkach liny w zakresie czasowym $t \in [0; 10]$ s

Wnioski

Wykorzystanie zmodyfikowanej zasady Hamiltona pozwala istotnie rozszerzyć możliwości modelowania matematycznego, zwłaszcza w stosunku do skomplikowanych układów dynamicznych o parametrach rozłożonych. Na podstawie wyników symulacji komputerowej można wyciągnąć szereg wniosków dotyczących pracy analizowanego układu. Przedstawione w pracy czasowo-przestrzenne rozkłady wielkości funkcyjnych niosą najwięcej informacji dla ewentualnego badacza. Przy ich pomocy można analizować przejściowe procesy fizyczne we wszystkie elementach jednostkowych układu.

Autorzy: dr hab. inż. Andriy Czaban prof. PCz, Uniwersytet Technologiczno – Humanistyczny, Wydział Transportu i Elektrotechniki, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, e-mail: atchaban@gmail.com, dr hab. inż. Marek Lis prof. PCz., Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 17, e-mail: lism@el.pcz.czest.pl, dr inż. Krzysztof Szewczyk Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny al. Armii Krajowej 17, e-mail: szewczyk500@gmail.com

LITERATURA

- [1] Czaban A. Zasada Hamiltona-Ostrogradskiego w układach elektromechanicznych, Lwów: W-wo T, Soroki 2015
- [2] Kharchenko E. Procesy dynamiczne w maszynach górniczych, Lwów: Sweet, 1991
- [3] Lis M. Modelowanie matematyczne procesów nieustalonych w elektrycznych układach napędowych o złożonej transmisji ruchu. Monografia W-wo Politechniki Częstochowskiej, 2013
- [4] Rusek A. Stany dynamiczne układów napędowych z silnikami indukcyjnymi specjalnego wykorzystania. Monografia. W-wo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 2012
- [5] Ziemiński R. Analiza drgań swobodnych pełnego układu dyskretno-ciągłego typu // Zesz. Nauk. A.G.H. – 1980. – Ne 775. – S. 177 – 188.
- [6] Popenda A. Mathematical Modelling of Real Transmission Shafts and Mechanical Connections with Clearances, *Przegląd Elektrotechniczny* nr 1, 2017, 189-192
- [7] Popenda A. Simple Mathematical Models of Transmission Shafts and Gear Trains. *Electrical and Mechanical Circuits, Przegląd Elektrotechniczny* nr 12, 2016, 137-140