

Badania symulacyjne metod estymacji czasu opóźnienia sygnałów losowych wykorzystujących transformatę Hilberta

Streszczenie. W artykule przedstawiono wyniki badań czterech korelacyjnych metod estymacji czasu opóźnienia, w których zastosowano transformatę Hilberta. W symulacjach wykorzystano wybrane modele wzajemnie opóźnionych sygnałów stochastycznych. Uzyskane wyniki porównano z wynikami otrzymanymi dla klasycznej korelacji wzajemnej.

Abstract. The article presents the research results of the four correlation time delay estimation methods, in which the Hilbert Transform is applied. In the simulations selected models of mutually delayed stochastic signals were used. The obtained results were compared with the classical cross-correlation procedure. (*Simulation study of the methods for time delay estimation of random signals using Hilbert Transform*)

Słowa kluczowe: estymacja czasu opóźnienia, sygnały losowe, transformata Hilberta, korelacja wzajemna.

Keywords: time delay estimation, random signals, Hilbert Transform, cross-correlation.

Wstęp

W takich dziedzinach techniki jak radiolokacja, telekomunikacja, akustyka, diagnostyka medyczna, czy sejsmologia estymacja czasu opóźnienia jest bardzo istotnym zagadnieniem. Tematyka ta jest szeroko przedstawiana w literaturze, m.in. w pracach [1-5]. Do wyznaczania czasu opóźnienia sygnałów losowych, otrzymywanych z dwóch lub większej liczby źródeł, stosuje się metody statystyczne [6-13]. Do najbardziej znanych metod klasycznych, stosowanych głównie dla gaussowskich sygnałów stacjonarnych, należą: funkcja korelacji wzajemnej i faza wzajemnej gęstości widmowej [1-3, 6, 11-13]. Modyfikacją metody korelacyjnej może być zastosowanie w miejsce sygnałów pomiarowych transformat Hilberta tych sygnałów lub otrzymanych z wykorzystaniem tego przekształcenia tzw. sygnałów analitycznych [14-20].

W niniejszej pracy opisano możliwości wykorzystania transformaty Hilberta w korelacyjnych pomiarach czasu opóźnienia sygnałów losowych. Przedstawiono przykładowe wyniki badań symulacyjnych czterech metod dla modeli sygnałów odpowiadających sygnałom uzyskiwanym w radioizotopowych badaniach przepływów dwufazowych. Otrzymane odchylenia standardowe estymacji wartości badanych funkcji oraz czasu opóźnienia transportowego porównano z odpowiednimi wynikami uzyskanymi dla klasycznej korelacji wzajemnej.

Zastosowanie transformaty Hilberta w korelacyjnych pomiarach czasu opóźnienia

Funkcja korelacji wzajemnej (FK) $R_{xy}(\tau)$ dwóch ergodycznych sygnałów $x(t)$ i $y(t)$ jest równa [6]:

$$(1) \quad R_{xy}(\tau) = E[(x(t)y(t+\tau))]$$

gdzie $E[\cdot]$ oznacza wartość oczekiwaną, a τ – opóźnienie. FK osiąga wartość maksymalną dla $\tau = \tau_0$, więc opóźnienie transportowe można wyznaczyć jako argument maksimum tej funkcji:

$$(2) \quad \tau_0 = \arg\{\max R_{xy}(\tau)\} = \arg\{R_{xy}(\tau_0)\}$$

Transformata Hilberta (TH) rzeczywistego sygnału $x(t)$ daje rzeczywisty sygnał $\tilde{x}(t)$ zgodnie z definicją [12, 14]:

$$(3) \quad \tilde{x}(t) = H[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(u)}{t-u} du$$

Transformata Hilberta może być zastosowana do realizacji tzw. sygnału analitycznego:

$$(4) \quad \underline{x(t)} = x(t) + jH[x(t)] = x(t) + j\tilde{x}(t)$$

Moduł sygnału analitycznego:

$$(5) \quad |\underline{x(t)}| = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)}$$

nazywany jest obwiednią sygnału $x(t)$.

W literaturze przedstawiono kilka możliwości zastosowania TH i sygnału analitycznego w korelacyjnych pomiarach czasu opóźnienia sygnałów losowych [12, 14-20].

W artykule [20] zaproponowano wykorzystanie do obliczeń funkcji korelacji wzajemnej TH sygnału opóźnionego $\tilde{y}(t)$ w miejsce sygnału $y(t)$. Uzyskana w ten sposób funkcja FK:

$$(6) \quad R_{x\tilde{y}}(\tau) = \tilde{R}_{xy}(\tau) = E[(x(t)\tilde{y}(t+\tau))]$$

ma miejsce zerowe dla $\tau = \tau_0$. Lokalizacji maksimum FK (1) odpowiada w tym przypadku poszukiwanie argumentu dla którego funkcja (6) przechodzi przez zero, co może być prostsze w realizacji.

Praca [14] zawiera analizę obwiedni FK określonej zależnością:

$$(7) \quad O_{1xy}(\tau) = \sqrt{R_{xy}^2(\tau) + \tilde{R}_{xy}^2(\tau)}$$

Ponieważ dla $\tau = \tau_0$ $\tilde{R}_{xy}(\tau_0) = R_{xy}(\tau_0) = 0$, dlatego

$O_{1xy}(\tau_0) = R_{xy}(\tau_0)$ i maksima FK oraz $O_{1xy}(\tau_0)$ pokrywają się. Właściwości funkcji obwiedni (7) omówiono w [14, 17].

Jeśli do wyznaczania FK zastosuje się dwa sygnały analityczne - pierwotny i opóźniony, otrzymana zespolona FK przyjmie postać [12, 14]:

$$(8) \quad \begin{aligned} \underline{R}_{xy}(\tau) &= E[(\underline{x}^*(t)\underline{y}(t+\tau))] = \\ &= R_{xy}(\tau) + R_{\tilde{x}\tilde{y}}(\tau) + j[R_{x\tilde{y}}(\tau) + R_{\tilde{x}y}(\tau)] \end{aligned}$$

Ponieważ $R_{\tilde{x}\tilde{y}}(\tau) = R_{xy}(\tau)$ oraz $R_{\tilde{x}y}(\tau) = -R_{x\tilde{y}}(\tau) = \tilde{R}_{xy}(\tau)$ [14], moduł zależności (8) daje funkcję:

$$(9) \quad O_{2xy}(\tau) = |R_{xy}(\tau)| = 2\sqrt{R_{xy}^2(\tau) + \tilde{R}_{xy}^2(\tau)} = 2O_{1xy}(\tau)$$

Dla $\tau = \tau_0$ argumenty maksimów funkcji (1), (7) i (9) pokrywają się.

W pracy [12] omówiono zastosowanie do analizy korelacyjnej sygnałów zdefiniowanych następująco:

$$x_1(t) = [x(t)]^2 + [H\{x(t)\}]^2, \quad y_1(t) = [y(t)]^2 + [H\{y(t)\}]^2.$$

Otrzymana rzeczywista funkcja korelacji wzajemnej ma postać [11]:

$$(10) \quad R_{x_1y_1}(\tau) = 4\sigma_x^2\sigma_y^2 + 4[R_{xy}^2(\tau) + \tilde{R}_{xy}^2(\tau)]$$

Jeśli do obliczeń korelacji (10) zastosuje się sygnały centrowane otrzyma się funkcję wyrażoną wzorem:

$$(11) \quad O_{3xy}(\tau) = 4[R_{xy}^2(\tau) + \tilde{R}_{xy}^2(\tau)] = 4O_{1xy}(\tau)$$

Badania symulacyjne

Modele sygnałów

W wielu zagadnieniach estymacji czasu opóźnienia zależność sygnałów $x(t)$ i $y(t)$ otrzymywanych z dwóch czujników przedstawia się wzorami [12]:

$$(12a) \quad x(t) = s(t) + m(t)$$

$$(12b) \quad y(t) = c \cdot s(t - \tau_0) + n(t)$$

gdzie: $s(t)$ - stacjonarny dolnoprzepustowy sygnał losowy o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa $N(0, \sigma_s)$, c - stały współczynnik (najczęściej $c = 1$); τ_0 - opóźnienie transportowe; $m(t), n(t)$ - stacjonarne, nieskorelowane z sygnałem $s(t)$ i wzajemnie ze sobą szumy białe o rozkładach $N(0, \sigma_m), N(0, \sigma_n)$.

Przy przedstawionych wyżej założeniach dla modeli sygnałów (12) prawdziwe są relacje:

$$(13a) \quad \sigma_x^2 = R_{xx}(0) = \sigma_s^2 + \sigma_m^2$$

$$(13b) \quad \sigma_y^2 = R_{yy}(0) = c^2\sigma_s^2 + \sigma_n^2$$

gdzie σ_x i σ_y oznaczają odchylenia standardowe odpowiednio sygnałów $x(t)$ i $y(t)$, a $R_{xx}(\cdot)$ i $R_{yy}(\cdot)$ ich funkcje autokorelacji.

Dla szumów dolnoprzepustowych o ograniczonym paśmie częstotliwościowym B gęstość widmowa mocy sygnału $s(t)$ ma postać:

$$(14) \quad S_{ss}(f) = \begin{cases} K/2 & |f| \leq B \\ 0 & \text{inne } f \end{cases}$$

a funkcja autokorelacji wyraża się równaniem:

$$(15) \quad R_{ss}(\tau) = KB \left(\frac{\sin 2\pi B \tau}{2\pi B \tau} \right)$$

W zależności od rozpatrywanego zagadnienia w modelach (12) przyjmuje się: $m(t) \neq n(t) \neq 0$ lub $m(t) = n(t) \neq 0$ albo $m(t) = 0$ i $n(t) \neq 0$. W praktyce najczęściej stosuje się dwa ostatnie przypadki.

Przykładowe wyniki

W celu porównania właściwości funkcji (6), (7), (9) i (11) w stosunku do klasycznej FK (1) przeprowadzono symulacje w środowisku LabVIEW. Generowano dyskretne sygnały stochastyczne $x(n)$ i $y(n)$, gdzie: $n = t/\Delta t$, Δt - odstęp próbkowania, odpowiadające modelom (12). Sygnał $s(n)$

formowano z szumu białego przy zastosowaniu cyfrowej filtracji dolnoprzepustowej, zakłócenia $m(n)$ i $n(n)$ były gaussowskimi szumami białymi nieskorelowanymi z sygnałami $x(n)$ i $y(n)$. Parametry sygnałów dobrano w ten sposób, aby uzyskać przebiegi FK podobne jak w radioizotopowych pomiarach przepływu ciec-z-gaz [21, 22].

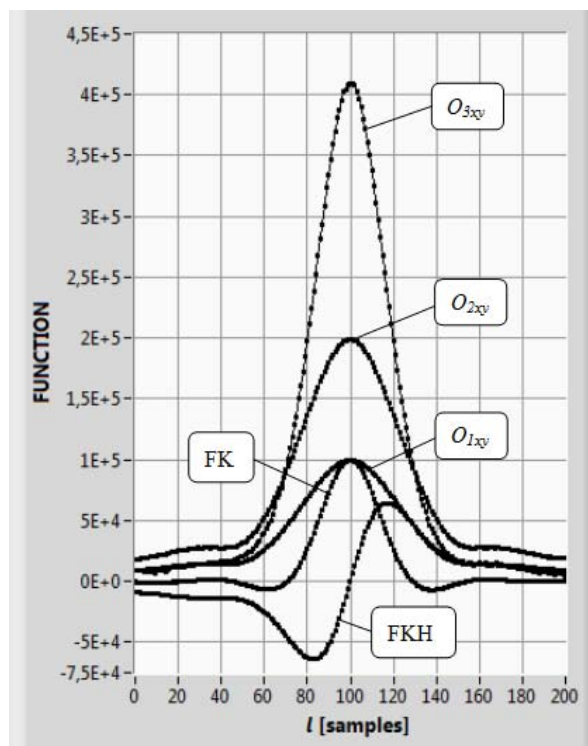
Dyskretny estymator FK obliczany był z zależności:

$$(16) \quad \hat{R}_{xy}(l) = \frac{1}{N-l} \sum_{n=0}^{N-l-1} x(n)y(n+l)$$

gdzie: N - liczba próbek, $l = \tau/\Delta t$.

Estymator ten zastosowano przy wyznaczaniu funkcji FK, FKH dla odpowiednich sygnałów oraz O_{1xy} , O_{2xy} i O_{3xy} zgodnie z zależnościami przedstawionymi w rozdziale drugim. W przeprowadzonych symulacjach przyjęto $\sigma_m = \sigma_n$, więc stosunek sygnału do szumu (SNR) był równy: $SNR = (\sigma_m/\sigma_s)^2 = (\sigma_n/\sigma_s)^2$.

Na rysunku 1 pokazano przebiegi funkcji: FK, FKH, O_{1xy} , O_{2xy} i O_{3xy} dla modeli sygnałów (12) i parametrów: względne pasmo $B\Delta t = 0,025$, $N = 100000$, $l_0 = \tau_0/\Delta t = 100$, $c = 1$, $\sigma_s = 1$, oraz $\sigma_m = \sigma_n = 0,5$ (SNR = 4).



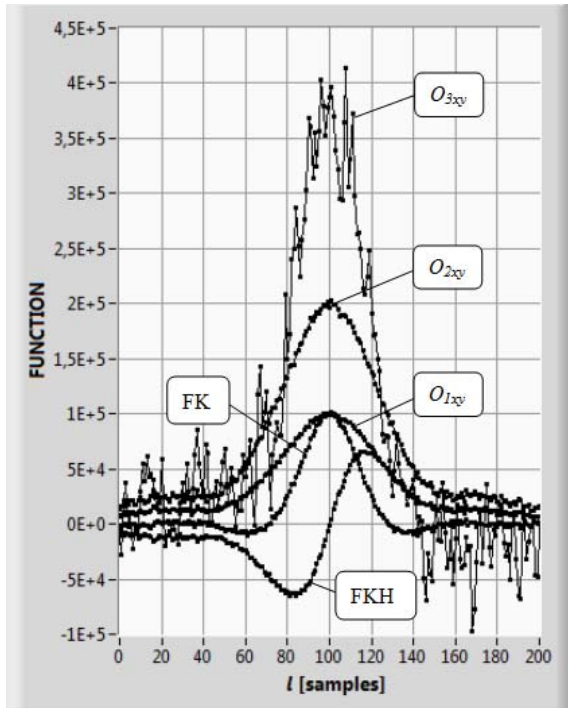
Rys. 1. FK, FKH oraz O_{1xy} , O_{2xy} i O_{3xy} dla modeli sygnałów stochastycznych (12) i parametrów: $N = 100000$, $l_0 = 100$, $c = 1$, $SNR = 4$.

Zwiększanie wartości σ_m i σ_n obniża SNR, co powoduje zniekształcenia przebiegu analizowanych funkcji. Przykład dla $SNR = 0,25$ przedstawiono na rysunku 2.

W pierwszym etapie badań dla zadanych wartości SNR wyznaczano eksperymentalne odchylenia standardowe wartości poszczególnych funkcji o otoczeniu $l = l_0$ ze wzoru:

$$(17) \quad \hat{\sigma}[\hat{f}(l)] = \left\{ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[\frac{\hat{f}(l)_i - \overline{\hat{f}(l)}}{\hat{f}(l)_{i_{\max}}} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

gdzie f oznacza rozważaną funkcję (FK, FKH, O_{1xy} , O_{2xy} lub O_{3xy}) a M - liczbę powtórzeń eksperymentu.



Rys. 2. FK, FKH oraz O_{1xy} , O_{2xy} i O_{3xy} dla modeli sygnałów stochastycznych (12). i parametrów: $N = 100000$, $l_0 = 100$, $c = 1$, $SNR = 0,25$.

W badaniach założono liczbę powtórzeń $M = 10^4$. Następnie obliczono wartości ilorazu:

$$(18) \quad k_{\sigma_f}(l) = \frac{\hat{\sigma}[\hat{f}(l)]}{\hat{\sigma}[FK(l)]}$$

Eksperymenty przeprowadzono dla $N = 100000$ i kilku wartości SNR. Wyniki dla $l = l_0 = 100$ zestawiono w tabeli 1. Najmniejsze wartości $k_{\sigma_f}(l_0)$ otrzymano w kolejności dla funkcji: FK, O_{1xy} , O_{2xy} , FKH i O_{3xy} .

Tabela 1. Wartości współczynnika $k_{\sigma_f}(l_0)$ otrzymane dla $l_0 = 100$

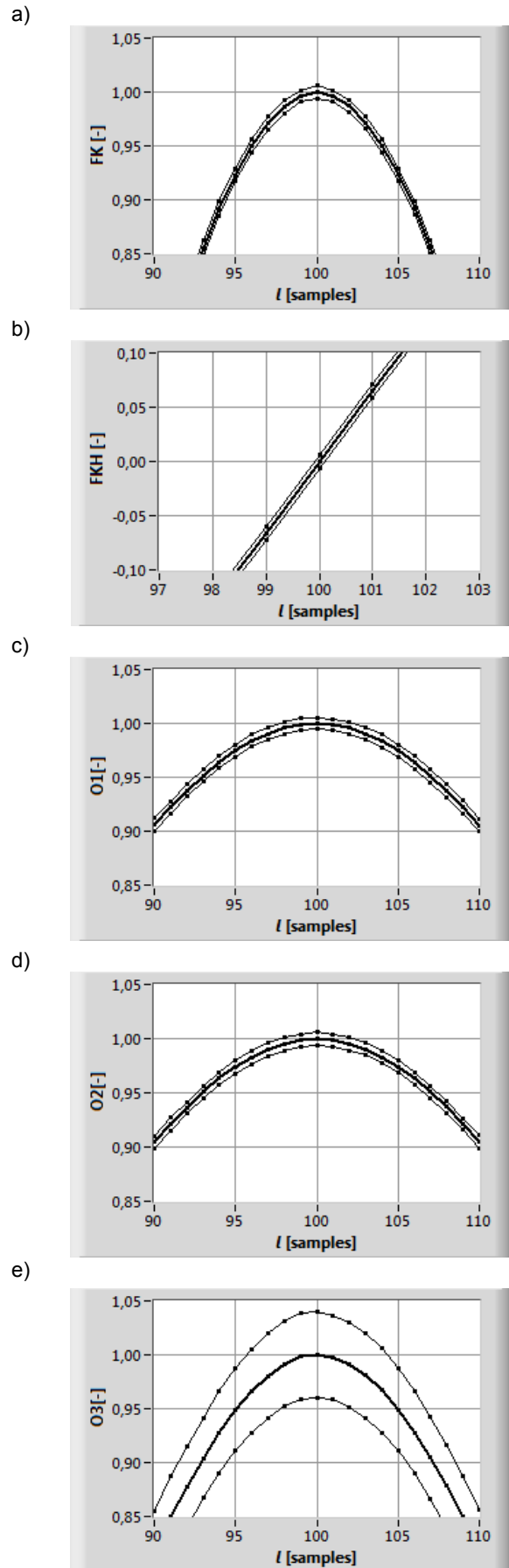
Parametr	$k_{\sigma_f}(l_0)$			
	SNR=4	SNR=1	SNR=0,44	SNR=0,25
FK	1,00	1,00	1,00	1,00
FKH	1,42	1,45	1,52	1,52
O_{1xy}	1,00	1,00	1,00	1,00
O_{2xy}	1,02	1,00	1,00	1,00
O_{3xy}	13,01	6,94	5,81	3,34

Na rysunku 3 pokazano przykładowe przebiegi unormowanych funkcji: FK, FKH, O_{1xy} , O_{2xy} i O_{3xy} w otoczeniu $l = l_0$ z zaznaczeniem przedziału jednego względnego odchylenia standardowego (17). Wartości poszczególnych funkcji unormowano w stosunku do ich wartości maksymalnych. Przyjęte wartości parametrów to: $N = 100000$, $l_0 = 100$, $c = 1$ oraz $SNR = 1$.

W zasadniczym etapie badań dla każdej funkcji i tych samych parametrów analizy obliczono wartości eksperymentalnych odchyłeń standardowych czasu opóźnienia $\hat{\sigma}(\hat{\tau}_0)_f$ oraz współczynnika $k_{\sigma_{\tau_0}}$ z zależności:

$$(19) \quad \hat{\sigma}(\hat{\tau}_0)_f = \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\tau}_{0fi} - \overline{\hat{\tau}_{0f}})^2 \right]^{1/2}$$

$$(20) \quad k_{\sigma_{\tau_0}} = \frac{\hat{\sigma}(\hat{\tau}_0)_f}{\hat{\sigma}(\hat{\tau}_0)_{FK}}$$



Rys. 3. Unormowane funkcje w otoczeniu $l = l_0$ z zaznaczeniem przedziału jednego względnego odchylenia standardowego: a) FK, b) FKH, c) O_{1xy} , d) O_{2xy} , e) O_{3xy} .

W celu wyznaczenia estymat opóźnienia $\hat{\tau}_0$ zastosowano aproksymację paraboliczną dla FK, O_{1xy} , O_{2xy} i O_{3xy} oraz liniową dla FKH w otoczeniu l_0 . Otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Wartości $k_{\sigma\tau_0}$ uzyskane w eksperymentach

Parametr Funkcja	$k_{\sigma\tau_0}$			
	SNR=4	SNR=1	SNR=0,44	SNR=0,25
FK	1,00	1,00	1,00	1,00
FKH	0,31	0,16	0,15	0,15
O_{1xy}	3,21	1,93	1,80	1,85
O_{2xy}	3,20	1,93	1,82	1,83
O_{3xy}	4,20	2,65	2,92	3,37

Na podstawie rezultatów z tabeli 2 można stwierdzić, że dla wszystkich przedstawionych wartości SNR najmniejsze wartości współczynnika $k_{\sigma\tau_0}$ uzyskuje się dla funkcji FKH.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono cztery opisywane w literaturze aplikacje transformaty Hilberta w korelacyjnych pomiarach czasu opóźnienia sygnałów stochastycznych. Podano wyniki badań symulacyjnych funkcji FK, FKH, O_{1xy} , O_{2xy} i O_{3xy} dla modeli wzajemnie opóźnionych sygnałów losowych, odpowiadających sygnałom uzyskiwanym z sond scyntylacyjnych w radioizotopowych pomiarach przepływów dwufazowych. Wyznaczono i porównano odchylenia standardowe wartości poszczególnych funkcji oraz odchylenia standardowe estymat czasu opóźnienia określonych na ich podstawie. Stwierdzono, że najmniejsze wartości odchylenia standardowego wartości funkcji dla $l = l_0$ w badanym zakresie stosunku sygnału do szumu mają w kolejności: FK, O_{1xy} , O_{2xy} , FKH, i O_{3xy} . Natomiast w przypadku estymacji czasu opóźnienia transportowego, co było głównym celem badań, najmniejsze wartości odchylenia standardowego estymat opóźnienia uzyskano dla FKH w całym analizowanym zakresie SNR.

Przedstawione w artykule badania wykonane zostały dla skorelowanych par próbek sygnałów, które zwykle rejestruje się w pomiarach przepływów z wykorzystaniem izotopów promieniotwórczych. Zagadnienie to jest znacznie trudniejsze do analitycznej analizy metrologicznej niż przypadek próbek nieskorelowanych, najczęściej omawiany w literaturze.

Wnioski wynikające z badań prezentowanych w artykule wykorzystano w pracach dotyczących aplikacji metody FKH w radioizotopowych pomiarach przepływów ciecz-cząstki stałe i ciecz-gaz w rurociągach [23, 24]. Autorzy prowadzą dalsze prace dotyczące zastosowania transformaty Hilberta w badaniach przepływów dwufazowych.

LITERATURA

- [1] Chen J., Benesty J., Huang Y., Time delay estimation in room acoustic environments: an overview. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2006 (2006), Article ID 026503, 1-10
- [2] Blok E., Classification and evaluation of discrete subsample time delay estimation algorithms, *Proc. of 14th Int. Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications* (2002), 764-767
- [3] Carter G.C. (ed.), Coherence and time delay estimation: an applied tutorial for research, development, test and evaluation engineers, IEEE Press, New York, (1993)
- [4] Waschburger R., Kawakami, Galvao H., Time delay estimation in discrete-time state-space models, *Signal Processing*, 93 (2013), 904-912
- [5] Assous S., Linnett L., High resolution time delay estimation using sliding discrete Fourier transform, *Digital Signal Processing*, 22 (2012), 820-827

- [6] Bendat J.S., Piersol A.G., Engineering applications of correlation and spectral analysis. Wiley, New York (2013)
- [7] Jacovitti G., Scarano G., Discrete time technique for time delay estimation, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41 (1993), 525-533
- [8] Hanus R., Zych M., Petryka L., Velocity measurement of the liquid-solid flow in a vertical pipeline using gamma-ray absorption and weighted cross-correlation. *Flow Measurement and Instrumentation*, 40 (2014), 58-63
- [9] Zych M., Petryka L., Kępniski J., Hanus R., Bujak T., Puskarczyk E., Radioisotope investigations of compound two-phase flows in an open channel, *Flow Measurement and Instrumentation*, 35 (2014), 11-15
- [10] Chen J., Benesty J., Huang Y., Performance of GCC-and AMDF-based time-delay estimation in practical reverberant environments", *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2005 (2005), Article ID 498964, 1-20
- [11] Beck M.S., Płaskowski A., Cross-Correlation Flowmeters. Adam Hilger, Bristol (1987)
- [12] Bendat J.S., Piersol A.G., Random data - analysis and measurement procedures. Wiley, New York (2010)
- [13] Hanus R., Zych M., Petryka L., Mosorov V., Hanus P., Application of the phase method in radioisotope measurements of the liquid - solid particles flow in the vertical pipeline. *EPJ Web of Conferences*, 92 (2015), 02020, DOI: 10.1051/epjconf/20159202020
- [14] Bendat J.S., The Hilbert Transform and Applications to Correlation Measurements. Brüel&Kjær, BT0008-11, Naerum, Denmark (1985)
- [15] Thrane N., Wismer J., et all, Practical use of the Hilbert Transform. Application Note Bo 0437, Brüel&Kjær (1996)
- [16] Velicković Z.S., Pavlović V.D., Complex analytic signals applied on time delay estimation. *Acta Univ. HTS Nis, s. Phys. Chem. and Technol.*, 6 (2008), 11-28
- [17] Hanus R., Zastosowanie transformaty Hilberta w korelacyjnych pomiarach opóźnień czasowych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 85 (2009), nr. 7, 45-48
- [18] Hanus R., Estymacja czasu opóźnienia sygnałów losowych z wykorzystaniem transformaty Hilberta i sygnału analitycznego, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr. 10a, 46-48
- [19] Hanus R., Badanie właściwości korelacyjnej metody estymacji czasu opóźnienia wykorzystującej transformatę Hilberta sygnału pomiarowego, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr. 10b, 39-41
- [20] Cabot R.C., A note on the application of the Hilbert transform to time delay estimation, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 29 (1981), 607-609
- [21] Zych M., Hanus R., Petryka L., Swisulski D., Strzępowicz A., Zych P., Application of gamma densitometry and statistical signal analysis to gas phase velocity measurements in pipeline hydrotransport, *EPJ Web of Conferences*, 92 (2015), 02122, DOI: 10.1051/epjconf/20159202122
- [22] Hanus R., Zych M., Petryka L., Swisulski D., Time delay estimation in two-phase flow investigation using the γ -ray attenuation technique, *Mathematical Problems in Engineering*, 2014 (2014), Article ID 475735, DOI:http://dx.doi.org/10.1155/2014/475735
- [23] Hanus R., Application of the Hilbert Transform to measurements of liquid-gas flow using gamma ray densitometry, *International Journal of Multiphase Flow*, 72 (2015), 210-217
- [24] Hanus R., Zych M., Petryka L., Hanus P., Application of Hilbert Transform to signal processing in radioisotope measurements of the liquid - solid particles flow in the vertical pipeline. *XXI IMEKO World Congress "Measurement in Research and Industry"*, August 30 - September 4, 2015, Prague, Czech Republic (w druku)

Autorzy: dr inż. Robert Hanus, Politechnika Rzeszowska, Wydział Elektrotechniki i Informatyki, ul. Powstańców Warszawy 12, 35-959 Rzeszów, E-mail: rohan@prz.edu.pl; dr inż. Marcin Zych, Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Geologii, Geofizyki i Ochrony Środowiska, Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, E-mail: zych@geol.agh.edu.pl; dr inż. Leszek Petryka, Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej, al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, E-mail: Leszek.Petryka@fis.agh.edu.pl