

doi:10.15199/48.2015.01.26

## Model matematyczny zespołu elektrycznego składającego się z transformatora mocy, silników indukcyjnych, obciążenia nieliniowego RL oraz baterii kompensacyjnej

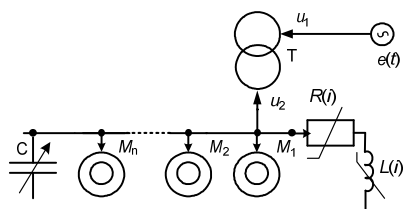
**Streszczenie.** W pracy poddano analizie procesy elektromechaniczne w zespole elektrycznym. Zespół ten składa się z transformatora mocy, silników indukcyjnych, nieliniowego obciążenia RL oraz baterii kompensacyjnej kondensatorów o zmiennej pojemności. W takich systemach procesy elektromagnetyczne i elektryczne są skomplikowane (stany asymetrii zasilania, obciążenia, stany zwarcia itp.), a ich analiza zagadnieniem bardzo ważnym. Dla sformułowania różniczkowych równań stanu rozpatrywanego układu wykorzystano interdyscyplinarną metodę, która wykorzystuje modyfikację zasady Hamiltona.

**Abstract.** In the paper the results of analysis of electromechanical processes occurring in an electrical set are presented. This set consists of power transformer, induction motors, nonlinear load RL and compensative battery of variable capacitors. The complex electromagnetic processes, caused by supply and load asymmetry, short-circuit states, etc., occur in the abovementioned systems. The analysis of the abovementioned processes is the meaningful problem. The interdisciplinary method is used in order to formulate the differential state equations of the considered system. The abovementioned method bases on a modification of Hamilton's principle. (**Mathematical model of the electrical set consisted of power transformer, induction motors, nonlinear load RL and battery of capacitors**)

**Słowa kluczowe:** zasada Hamiltona-Ostrogradskiego, Euler-Lagrange'a system, zespół elektryczny, transformator mocy  
**Keywords:** Hamilton-Ostrogradsky's principle, Euler-Lagrange's system, electrical set, power transformer

### Wstęp

Transformatory są powszechnie stosowane w przemysłowych systemach energetycznych, w których występuje duża ilość odbiorów o charakterze najczęściej indukcyjnym. W takich systemach występują skomplikowane procesy elektromagnetyczne i elektryczne np.: stany asymetrii zasilania, obciążenia, stany zwarcia itp. [1,3,7]. Innym ważnym problemem, który pojawia się w zespołach elektrycznych jest stabilizacja napięcia węzła zasilającego. W stanach ustalonych ważnym zagadnieniem jest kompensacja mocy biernej. W przypadku ogólnym można wyodrębnić dwa typy zespołów elektrycznych – urządzenia z elementami kompensacyjnymi oraz bez nich [1, 3]. Zespoły drugiego typu zazwyczaj występują w układach małej mocy. Natomiast w układach średniej i wielkiej mocy takie urządzenia są niezbędne. Aby odtworzyć prawdziwy fizyczny obraz obiektu w układzie elektromaszynowym należy zastosować wysoko-adekwatny model matematyczny, który w pracy sformułowano drogą przekształcenia rozszerzonego funkcjonału działania wg Hamiltona. [1, 4, 5].



Rys. 1. Schemat połączeń zespołu elektrycznego z baterią kompensacyjną

### Model matematyczny układu.

Schemat połączeń analizowanego układu przedstawiono na rys. 1. Dla sformułowania modelu matematycznego zespołu elektrycznego składającego się ze źródła energii, transformatora mocy, silników indukcyjnych, urządzenia kompensacyjnego o zmiennej pojemności oraz nieliniowego rezystancyjno-indukcyjnego obciążenia wykorzystano przedstawioną w [1, 5] interdyscyplinarną metodę zastosowania rozszerzonego funkcjonału działania wg Hamiltona [1, 5], drogą

formowania elementów niekonserwatywnego lagrangianu [2, 3]. Właśnie równania ekstremali tego funkcjonału są modelem matematycznym układu elektroenergetycznego.

W modelu matematycznym układu uwzględniono sprężystość linii walów. Zmodyfikowany lagrangian opisano zależnościami [1, 4]:

$$(1) \quad L^* = \tilde{T}^* - P^* + \Phi^* - D^*,$$

gdzie  $L^*$  – zmodyfikowana funkcja Lagrange'a,  $\tilde{T}^*$  – koenergia kinetyczna,  $P^*$  – energia potencjalna,  $\Phi^*$  – energia dyssypacji,  $D^*$  – energia sił zewnętrznych.

Jako uogólnionych współrzędnych wykorzystano ładunki w uzwojeniach silników indukcyjnych:  $q_{(1-6),k} = Q_{(1-6),k}$ , kąty obrotu jednostek inercyjnych:  $q_{(7,8),k} = \gamma_{(1,2),k}$ , ładunki elektryczne w uzwojeniach transformatora mocy:  $q_{9-14} = Q_{9-14}$ , ładunki w uzwojeni nieliniowego elementu:  $q_{15-17} = Q_{15-17}$  oraz ładunki kondensatora:  $q_{18-20} = Q_{CA}, Q_{CB}, Q_{CC}$ . Jako uogólnionych prędkości odpowiednio: prądy w wymienionych uzwojeniach oraz prędkości kątowe inercyjnych jednostek silników indukcyjnych:  $\dot{q}_{(1-6),k} = i_{(1-6),k}$ ,  $\dot{q}_{(7,8),k} = \omega_{(1,2),k}$ ,  $\dot{q}_{9-14} = i_{9-14}$ ,  $\dot{q}_{15-17} = i_{rA}, i_{rB}, i_{rC}$ ,  $\dot{q}_{18-20} = i_{NA}, i_{NB}, i_{NC}$ . Przy czym  $k = N$  – liczba silników indukcyjnych w zespole elektrycznym obciążania.

Elementy niekonserwatywnego lagrangianu dla układu elektroenergetycznego przedstawionego na rys. 1 opisane są zależnościami

$$(2) \quad \tilde{T}^* = \sum_{j=1}^3 \left[ \int_0^{i_{1j}} \Psi_{1j} di_{1j} + \int_0^{i_{2j}} \Psi_{2j} di_{2j} + \int_0^{i_{rj}} \Psi_{rj} di_{rj} \right] + \sum_{k=1}^N \left( \sum_{j=1}^3 \left[ \int_0^{i_{Sj,k}} \Psi_{Sj,k} di_{Sj,k} + \int_0^{i_{Rj,k}} \Psi_{Rj,k} di_{Rj,k} \right] + \frac{J_{1,k} \omega_{1,k}^2}{2} + \frac{J_{2,k} \omega_{2,k}^2}{2} \right),$$

$$(3) P^* = \sum_{k=1}^N \frac{c_{1,2,k}(\gamma_{2,k} - \gamma_{1,k})^2}{2} + \sum_{j=1}^3 \frac{Q_{C,j}^2}{2C_j},$$

$$(4) \Phi^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \int_0^t (r_{1j} i_{1j}^2 + r_{2j} i_{2j}^2) d\tau + \sum_{k=1}^N \left( \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \int_0^t (r_{Sj,k} i_{Sj,k}^2 + r_{Rj,k} i_{Rj,k}^2) d\tau + \frac{v_{1,2,k}(\omega_{2,k} - \omega_{1,k})^2}{2} \right) + \int_0^t R(i_r) i_r^2 d\tau,$$

$$(5) D^* = \sum_{j=1}^3 \int_0^t (u_{1j} i_{1j} + u_{2j} (i_{2j} - i_{rj})) d\tau + \sum_{j=1}^3 \int_0^t \frac{Q_{Cj}}{C_j} i_{Cj} d\tau + \sum_{k=1}^N \left( \sum_{j=1}^3 \int_0^t u_{2j} i_{Sj,k} d\tau + \int_0^t \int_0^{\omega_{1,k}} M_{EM,k} d\omega_{1,k} d\tau - \int_0^t \int_0^{\omega_{2,k}} M(\omega_{2,k}) d\omega_{2,k} d\tau \right) j = A, B, C,$$

gdzie  $\Psi_1, \Psi_2$  – wektory kolumnowe strumieni sprzężonych uzwojeń transformatora,  $r_1, r_2$  – macierze rezystancji uzwojeń strony pierwotnej i wtórnej,  $i_1, i_2$  – wektory kolumnowe prądów uzwojeń transformatora,  $u_1, u_2$  – wektory kolumnowe napięć transformatora, z indeksami  $s$  to samo tylko dla silników indukcyjnych,  $c, v$  – współczynniki sztywności oraz rozproszenia sprzęgła elastycznego silników,  $i_r$  – prąd w obciążeniu nieliniowym,  $M_{EM,k}$  – moment elektromagnetyczny silnika,  $M(\omega_{2,k})$  – moment obciążenia silnika.

Sformułowano na podstawie wyrażeń (2) – (5) niekonserwatywny lagrangian (1). Następnie podstawiono go do funkcjonału działania wg Hamiltona [1]. Dalej, wyznaczono wariacje tego funkcjonału i przyrównano ją do zera. W efekcie otrzymano równania ekstremali funkcjonału, a z nich otrzymano zależności opisujące układ:

$$(6) \frac{d\Psi_1}{dt} = u_1 - r_1 i_1, \quad \frac{d\Psi_2}{dt} = u_2 - r_2 i_2,$$

$$(7) \frac{d\Psi_{S,k}}{dt} = u_{S,k} - r_{S,k} i_{S,k}, \quad \frac{d\Psi_{R,k}}{dt} = -r_{RL,k} i_{R,k}, \quad u_{S,k} \equiv u_2,$$

$$(8) \frac{d\Psi_{rj}}{dt} = u_{2j} - R_j(i_{rj}) i_{rj}, \quad j = A, B, C,$$

$$(9) \frac{d\omega_{1,k}}{dt} = \frac{1}{J_{1,k}} (M_{EM,k} + c_{1,2,k}(\gamma_{2,k} - \gamma_{1,k}) + v_{1,2,k}(\omega_{2,k} - \omega_{1,k})),$$

$$(10) \frac{d\omega_{2,k}}{dt} = -\frac{1}{J_{2,k}} (c_{1,2,k}(\gamma_{2,k} - \gamma_{1,k}) + v_{1,2,k}(\omega_{2,k} - \omega_{1,k}) + M(\omega_{2,k})),$$

$$(11) \frac{d\gamma_{1,k}}{dt} = \omega_{1,k}, \quad \frac{d\gamma_{2,k}}{dt} = \omega_{2,k},$$

$$(12) \frac{dQ_{Cj}}{dt} = \frac{du_{Cj}}{dt} = \frac{1}{C_j} i_{Cj}, \quad j = A, B, C.$$

Do równań (6) – (8) zapisano równania stacjonarnych powiązań między pełnymi i roboczymi strumieniami

skojarzonymi oraz prądami w transformatorze mocy i w silnikach indukcyjnych [1]

$$(13) \Psi_1 = \alpha_{\sigma 1}^{-1} i_1 + \psi, \quad \Psi_2 = \alpha_{\sigma 2}^{-1} i_2 + \psi, \quad \psi = \tau^{-1} (i_1 + i_2),$$

$$(14) \Psi_S = \alpha_{\sigma S}^{-1} i_S + \Psi_S, \quad \Psi_R = \alpha_{\sigma R}^{-1} i_R + \Psi_S, \quad \Psi_S = \Pi \Psi_R,$$

$$(15) \psi_S = \tau^{-1} (i_S + \Pi i_R), \quad L_m = \tau^{-1},$$

gdzie  $\Psi$  – macierzy pełnych strumieni skojarzonych (transformatora oraz silnika)  $\psi$  – macierz roboczych sprzężeń magnetycznych (transformatora oraz silnika),  $L_m$  – indukcyjność magnesowania maszyn,  $\tau$  – macierz odwrotnych indukcyjności magnesowania transformatora,  $\tau$  główna odwrotna statyczna indukcyjność silników indukcyjnych.

Biorąc pod uwagę algorytm przekształceń algebraicznych [1 – 4], uzyskano model matematyczny układu we współrzędnych prądów:

$$(16) \frac{d\dot{i}_1}{dt} = A_1(u_1 - r_1 i_1) + A_{12}(u_1 - r_2 i_2),$$

$$(17) \frac{d\dot{i}_2}{dt} = A_{21}(u_1 - r_1 i_1) + A_2(u_2 - r_2 i_2),$$

$$(18) \frac{d\dot{i}_{S,k}}{dt} = A_{S,k}(u_2 - r_{S,k} i_{S,k}) + A_{SR,k}(-u_{R,k} - \Omega_k \Psi_{R,k} - r_{R,k} i_{R,k}),$$

$$(19) \frac{d\dot{i}_{R,k}}{dt} = A_{RS,k}(u_2 - r_{S,k} i_{S,k}) + A_{R,k}(-u_{R,k} - \Omega_k \Psi_{R,k} - r_{RL,k} i_{R,k}) + \Omega_k i_{R,k},$$

gdzie  $A_1, A_{12}, A_{21}, A_2$  – współczynniki, które zależą od indukcyjności rozproszenia i magnesowania transformatora mocy,  $A_{S,k}, A_{SR,k}, A_{RS,k}, A_{R,k}$  – to samo, tylko dla silników indukcyjnych.

Przekształcając wyrażenie (8) otrzymano

$$(20) \frac{d\Psi_r}{dt} = \frac{\partial \Psi_r}{\partial i_r} \frac{di_r}{dt} \Rightarrow L_r^{\partial} \frac{di_r}{dt} = u_2 - R(i_r) i_r.$$

Skąd, uzyskano macierzowo-wektorowe równanie nieliniowego obciążenia zespołu:

$$(21) \frac{di_r}{dt} = \alpha_r^{\partial} (u_2 - R(i_r) i_r).$$

Ponieważ napięcie węzła jest takie samo, jak napięcie wtórnego uzwojenia transformatora, zasilania silników indukcyjnych, gałęzi obciążania, a także baterii kondensatorów statycznych, to uwzględniając ten fakt można zapisać:

$$(22) \frac{du_C}{dt} \equiv \frac{du_2}{dt} \equiv \frac{d}{dt} U_0 = \tilde{N}^{-1} i_C,$$

gdzie  $U_0$  – macierz napięcia węzła obciążania.

Prąd płynący przez kondensator na podstawie równań powiązań stacjonarnych przedstawiono w postaci zależności:

$$(23) i_{\tilde{N}} = -(i_2 + i_{S,1} + i_{S,2} + \dots + i_{S,N} + i_r).$$

Podstawiając zależność (23) do (22) otrzymano:

$$(24) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{U}_0 = -\mathbf{N}^{-1} (\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_{S,1} + \mathbf{i}_{S,2} + \dots + \mathbf{i}_{S,N} + \mathbf{i}_R).$$

Momenty elektromagnetyczne silników indukcyjnych przedstawiają równania [1]:

$$(25) \quad M_{E,k} = \sqrt{3} p_{0,k} (i_{SB,k} i_{RA,k}^{\Pi} - i_{SA,k} i_{RB,k}^{\Pi}) / \tau_{m,k},$$

gdzie  $p_0$  – liczba par biegunów maszyn.

Wspólnemu całkowaniu podlega układ równań różniczkowych: (9) – (11), (16) – (19), (21), (24) z uwzględnieniem zależności (23), (24), (25).

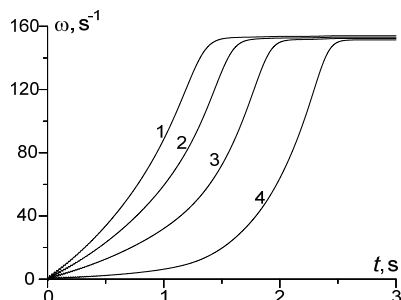
### Wyniki symulacji komputerowej.

Do analizy stanów nieustalonych wykorzystano zespół elektryczny, schemat połączeń którego przedstawiono na rys. 1. Transformator mocy o następujących danych:  $U_{H1} = 6 \text{ kV}$ ,  $U_{H2} = 0,4 \text{ kV}$ ,  $S_H = 160 \text{ kVA}$ ,  $P_0 = 410 \text{ W}$ ,  $i_0 = 2 \%$ ,  $P_{ZW} = 3650 \text{ W}$ . Transformator zasila 40 silników indukcyjnych z różnymi momentami obciążania. Silniki podzielono na cztery grupy w zależności od momentów obciążania (po 10 napędów elektrycznych). Dla pierwszej grupy:  $M_I(\omega_2) = 10 \text{ Nm}$ , dla drugiej  $M_{II}(\omega_2) = 15 \text{ Nm}$ , dla trzeciej  $M_{III}(\omega_2) = 20 \text{ Nm}$  i dla czwartej  $M_{IV}(\omega_2) = 25 \text{ Nm}$ . Parametry silników:  $P_H = 4,5 \text{ kW}$ ,  $U_N = 380 \text{ V}$ ,  $I_N = 9,4 \text{ A}$ ,  $n_N = 1440 \text{ obr/min}$ ,  $r_S = 1,2 \Omega$ ,  $r_R = 1,21 \Omega$ ,  $\alpha_{\sigma S} = 146 \text{ GH}^{-1}$ ,  $\alpha_{\sigma R} = 128 \text{ GH}^{-1}$ ,  $p_0 = 2$ ,  $J = 0,05 \text{ kgm}^2$ . Krzywą magnesowania silników zamodelowano w sposób następujący:

$$(26) \quad i_m = \begin{cases} \alpha_m \psi_m, & \text{if } \psi_m \leq \psi_k; \\ k_0 \psi_m + k_1 \psi_m^3 + k_2 \psi_m^5, & \text{if } \psi_m > \psi_k, \end{cases}$$

gdzie:  $k_0 = 8,13$ ,  $k_1 = -5,34$ ,  $k_2 = 7,21$ ,  $\alpha_m = 7,14$ ,  $\psi_k = 0,63$ .

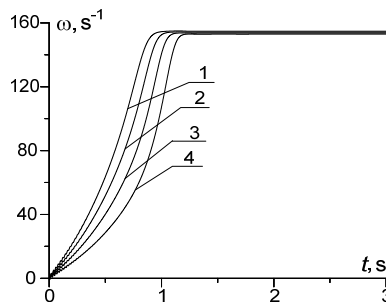
Parametry kondensatora przyjęto:  $C_1 = 10 \mu F$ ,  $C_2 = 300 \mu F$ ,  $C_3 = 10 \text{ mF}$ ,  $C_4 = 130 \text{ mF}$ . Uzwojenie pierwotne transformatora mocy zasilane od źródła nieskończonej mocy:  $u_{1A} = 4900 \sin(314t) \text{ V}$ ,  $u_{1B} = 4900 \sin(314t - 2\pi/3) \text{ V}$ . Przedstawiono pięć przypadków obliczeniowych, w zależności od pojemności baterii kondensatorów.



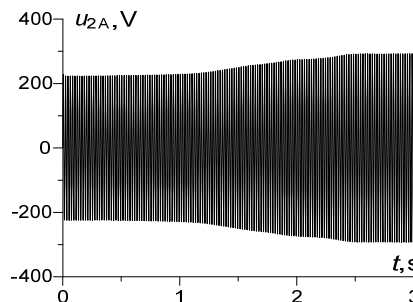
Rys. 2. Przebiegi czasowe prędkości kątowych wszystkich grup napędów dla pierwszego przypadku obliczeniowego

Na rys. 2, 3 przedstawiono przebiegi czasowe prędkości wirowania wszystkich grup napędów dla pierwszego i czwartego przypadku obliczeniowego. Z przebiegów widać, że w pierwszym przypadku obliczeniowym czasy wejścia napędów w stan ustalony wynoszą: pierwszą grupa – 1,4 s, druga – 1,7 s, trzecia – 2 s i czwarta – 2,6 s. Natomiast dla czwartego przypadku obliczeniowego wymienione czasy są następujące: pierwsza grupa – 1,0 s, druga – 1,1 s, trzecia

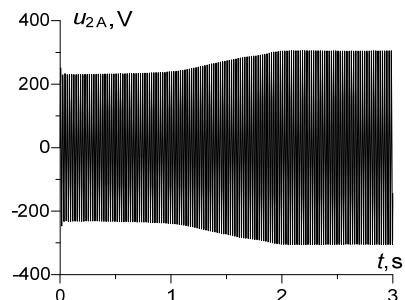
– 1,2 s i czwarta – 1,3 s. Jak widać wzrost pojemności ma istotny wpływ na czas rozruchu maszyn.



Rys. 3. Przebiegi czasowe prędkości kątowych wszystkich grup napędów dla czwartego przypadku obliczeniowego

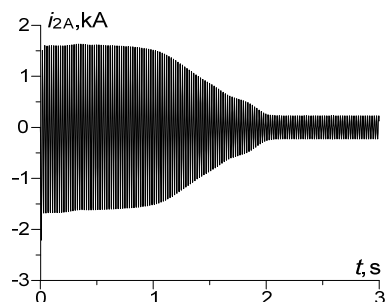


Rys. 4. Przebiegi czasowe napięcia fazowego zespołu elektrycznego dla pierwszego przypadku obliczeniowego



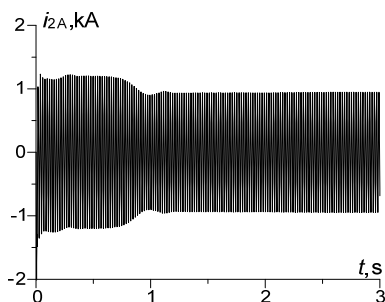
Rys. 5. Przebiegi czasowe napięcia fazowego zespołu elektrycznego dla trzeciego przypadku obliczeniowego

Na rys. 4 i 5 przedstawiono przebiegi czasowe napięcia fazy A zespołu elektrycznego dla pierwszego i trzeciego przypadku obliczeniowego. Z analizy porównawczej obu rysunków można zauważyć wzrost napięcia w węzle w trzecim przypadku obliczeniowym, co można wytłumaczyć zwiększeniem pojemności baterii kondensatorów. W doświadczeniu pierwszym w stanie ustalonym wymienione napięcie wynosi 275 V, a w doświadczeniu trzecim wynosi 310 V. Dla zwykłych zespołów obciążania międzyprzewodowe napięcie powinno być w granicach  $U = 380 \pm 5\% \text{ V}$ .

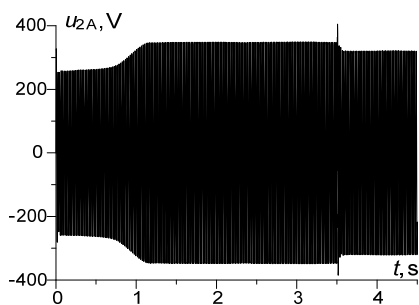


Rys. 6. Przebieg czasowy prądu fazowego w szynie zespołu elektrycznego dla trzeciego przypadku obliczeniowego

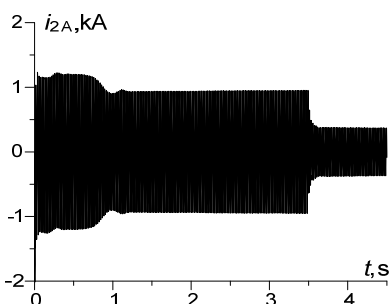
Na rys. 6 i 7 pokazano przebiegi czasowe prądu fazy A w szynach zespołu dla trzeciego i czwartego przypadku obliczeniowego. Porównując oba te przebiegi można zauważyć, że zmiana wartości pojemności baterii kondensatorów spowodowało znaczące zmiany w węzle obciążenia elektrycznego. Po pierwsze, zmniejszył się czas procesu przejściowego w trzecim i czwartym przypadku obliczeniowym od 1,2 s do 2 s. Po drugie, zmniejszyła się amplituda prądów od 3 kA do 2,5 kA. Po trzecie, co jest szczególnie istotne, znacznie zwiększył się prąd w szynie węzła z 500 A do około 1800 A. Tak duże prądy przepływają przez baterię kompensacyjną, ale również przez uzwojenia transformatora. W takich warunkach węzeł obciążenia elektrycznego nie może pracować efektywnie. Z drugiej strony, wartość pojemności baterii w czwartym przypadku obliczeniowym jest dość efektywną podczas rozruchu silników indukcyjnych. Dlatego logicznym jest wnioski co do zmiany liczby kondensatorów w baterii. Rozruch silników powinien odbywać się przy baterii o podwyższonej pojemności (przy tak zwanej pojemności rozruchowej), a w stanie ustalonym pojemność baterii kompensacyjnej w celu zapewnienia warunków jakości energii elektrycznej – powinna być mniejsza tzw. Bateria robocza. Piąty przypadek obliczeniowy przedstawia ten problem.



Rys. 7. Przebieg czasowy prądu fazowego w szynie zespołu elektrycznego dla czwartego przypadku obliczeniowego



Rys. 8. Przebieg czasowy napięcia fazowego zespołu elektrycznego dla piątego przypadku obliczeniowego



Rys. 9. Przebieg czasowy prądu fazowego w szynie zespołu elektrycznego dla piątego przypadku obliczeniowego

Na rys. 8 i 9 pokazano przebiegi czasowe napięcia i prądu fazy A węzła obciążenia elektrycznego dla piątego przypadku obliczeniowego. Dokonując analizy tych rysunków można zauważyć, że problem elektrodynamicznego stanu węzła został rozwiązany drogą zmiany pojemności baterii kompensacyjnej. Oznacza to, że zmiana pojemności baterii z  $C_4 = 130 \mu F$  do  $C_3 = 10 \mu F$  dała możliwość prowadzenia rozruchu wszystkich silników indukcyjnych z optymalnym napięciem, natomiast w stanie stacjonarnym doprowadzić napięcie i prąd węzła obciążenia do wartości znamionowych.

## Wnioski

1. Zastosowanie interdyscyplinarnych podejść wariacyjnych umożliwia budowanie modeli matematycznych bardzo skomplikowanych układów elektroenergetycznych oraz elektromechanicznych zwłaszcza zespołów obciążenia elektrycznego, elementami którego są: transformator mocy, silniki indukcyjne, aktywno-indukcyjne obciążenie oraz baterie kondensatorów kompensacyjnych
2. Korzystając z modeli matematycznych zespołu elektrycznego można analizować praktycznie dowolne stany pracy tego ostatniego, co daje możliwości z jednej strony efektywnie wykorzystywać w stanach pracy jednostki węzła, a z drugiej strony – daje możliwości zabezpieczenia jakości energii elektrycznej.
3. Na podstawie wyników symulacji komputerowej można prawidłowo dobrać parametry tak roboczej, jak i rozruchowej pojemności baterii kompensacyjnej. Pozwala to uniknięcia formowania zadania optymalizacji.

## LITERATURA

- [1] Czaban A. Modelowanie matematyczne procesów oscylacyjnych systemów elektromechanicznych. (Wydanie drugie, zmienione i uzupełnione). – Lwów: W-wo T. Soroki 2008. – 328 s.
- [2] A. Czaban, A. Rusek Wykorzystanie zasady Hamiltona-Ostrogradskiego dla modelowania matematycznego stanów asymetrycznych w głębokoźłobkowym napędzie asynchronicznym // *Технічні вісн.* – 2011/1(33), 2(34). – С. 58 – 61.
- [3] Czaban A., Rusek A., Lis M.: The Approach Based on Variation Principles for Mathematical Modeling of Asymmetrical States in a Power Transformer. *Przegląd Elektrotechniczny* R.88 nr 12b 2012 s.240-242 ISSN 0033-2097.
- [4] Rusek A.: Stany dynamiczne układów napędowych z silnikami indukcyjnymi specjalnego wykonania, Seria Monografie 228, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2012.
- [5] Lis M.: Modelowanie matematyczne procesów przejściowych w elektrycznych układach napędowych o złożonej transmisji ruchu, Seria monografie, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2013
- [6] Hickiewicz J., Macek-Kamińska K.: Modele, badania symulacyjne i pomiary weryfikacyjne napędów grupowych. *Prace Naukowe Instytutu Maszyn, Napędów i Pomiarów Elektrycznych Politechniki Wrocławskiej*, Nr 50, 2000, s. 268-278
- [7] Puchała A.: Elektromechaniczne przetworniki energii, BOBRME Komel, Katowice 2002

**Autorzy:** prof. nadzw. dr hab. inż. Andriy Czaban, Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 17, E-mail: [atchaban@gmail.com](mailto:atchaban@gmail.com); dr. inż. Marek Lis Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 17 [lis@el.pcz.czest.pl](mailto:lis@el.pcz.czest.pl); prof. nadzw. dr hab. inż. Andrzej Popenda, Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 17, E-mail: [popenda@el.pcz.czest.pl](mailto:popenda@el.pcz.czest.pl); mgr inż. Marek Patro; mgr inż. Marcjjan Nowak Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 1